АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

ОБ ОБОБЩЕНИЯХ ФРЕЙМОВ И НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АППРОКСИМАЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ ГРАНД ЛЕБЕГА

Специальность: 1202.01 – Анализ и функциональный анализ

Отрасль науки: Математика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора наук

Соискатель: ____________________________ **Исмайлов Мигдад Имдад оглы**
д.ф. п.м., доц.

Научный консультант: ____________________ **Билалов Билал Тельман оглы**
Член корр. НАНА, д.ф.-м.н., проф.

Баку – 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

стр.

ВВЕДЕНИЕ …………………………………………………………………………**5**

ГЛАВА I. b**-БЕССЕЛЕВЫ И** b**-ГИЛЬБЕРТОВЫ СИСТЕМЫ** ……………**48**

1.1. Некоторые понятия и вспомогательные факты ……………………………..49

1.2. b-бесселевы и b-гильбертовы системы в гильбертовых пространствах …52

1.3. b-базисы Рисса в гильбертовых пространствах ....……………………...60

1.4. b-бесселевы, b-гильбертовы системы и b-Рисс базисы в банаховых пространствах ……………………………………………………………………. 63

1.5. $\hat{X}$-бесселевость, $\hat{X}$-гильбертовость и $\hat{X}$-Рисс базисность систем в банаховых пространствах ..…………………………………………………… 71

1.6. О несчетных K-бесселевых и K-гильбертовых системах в несепарабельных банаховых пространствах ………………………………………………….. 79

ГЛАВА II. b**-ИЗОМОРФНЫЕ** b**-БАЗИСЫ** ……………………………………**89**

2.1. Об b-изоморфных b-базисах в банаховых пространствах 90

2.2. Устойчивость b-базиса в банаховых пространствах ………………………95

2.3. $\hat{X}$-бесселевый b-базис в банаховых пространствах и его устойчивость....97

ГЛАВА III. b**-ФРЕЙМЫ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ И БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ** ……………………………………………………………...**101**

3.1. b-фреймы и некоторые свойства b-фреймового оператора в гильбертовых пространствах ………..……………………………………………………...102

3.2. b-фреймы в банаховых пространствах ……………………..……..........110

3.3. $\hat{X}$-фреймы и их сопряженные системы в банаховых пространствах……115

3.4. О связи $\hat{X}$-фреймов с $\hat{X}$-Рисс базисами в банаховых пространствах…….120

3.5. b-атомарные разложения в банаховых пространствах и их нетерово возмущение ……………………………..………………………........................125

3.6. Устойчивость b-атомарного разложения и $\hat{X}$-фрейма в банаховых пространствах ……………………………………………………………........128

3.7. Устойчивость банахового $\hat{X}$ -фрейма и $\hat{X}$ -Рисс g -базиса в банаховых пространствах ……………………………………………………………………..133

ГЛАВА IV. НЕКОТОРЫЕ АНАЛОГИ КЛАССИЧЕСКИХ ТЕОРЕМ ТИПА РИССА-ФИШЕРА И ПЭЛИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ…………………138

4.1. $l_p(a,b)$ варианты теорем Рисса-Фишера и Пэли ……………………………139

4.2. Аналоги теорем Рисса и Пэли в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости……………………………………………….......144

4.3. О применении $l_{p,p-2}(a,b)$ аналога теоремы Пэли к решению смешанной задачи для одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка ……………………………………………………………………………...151

ГЛАВА V. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ БАЗИСЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ГРАНД ЛЕБЕГА. ПРИЛОЖЕНИЯ К НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМ СПЕКТРАЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ ……………………………………………162

5.1. Сепарабельное подпространство пространства гранд Лебега …..………..163

5.2. Базисность системы экспонент и тригонометрических систем в сепарабельном подпространстве пространства гранд Лебега ……………..…………167

5.3. Базисности системы экспонент и тригонометрических систем в весовых сепарабельных подпространствах пространства гранд Лебега ..……….....171

5.4. Базисные свойства системы собственных функций одной разрывной спектральной задачи для дифференциального уравнения второго порядка в пространстве гранд Лебега ………………………..…………………176

5.5. Базисность собственных функции разрывного дифференциального оператора одной спектральной задачи в весовых пространствах гранд Лебега.187

5.6. Аналоги теорем Коровкина и их статистические варианты в пространствах гранд Лебега ……………………………..……………………......195

ГЛАВА VI. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ РИМАНА В КЛАССАХ ГРАНД ХАРДИ. ПРИЛОЖЕНИЯ К ВОПРОСАМ БАЗИСОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ГРАНД ЛЕБЕГА ……………………………...………..……….201

6.1. Классы гранд Харди и некоторые их свойства …………..……….………202

6.2. Разрешимость однородной задачи Римана в классах гранд Харди $H^{+}_{p)} \times_m H^{-}_{p)}$ ……………………………………………………………………...211

6.3. Разрешимость неоднородной задачи Римана в классах гранд Харди $H^{+}_{p)} \times_m H^{-}_{p)}$ ……………...…………………………………………………………..216

6.4. Приложения к базисности возмущенной системы экспонент в пространствах гранд Лебега ……………………………………………………………222

Выводы ……………………………………………………………………...230

Список используемой литературы …………………………………………**232**

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы и степень разработки. Понятия бесселевых и гильбертовых систем относительно пары биортогональных систем и базиса Рисса в пространстве L_2 были введены в 1951 году Н.К.Бари [5]. Об этих и других сведениях касающихся этих понятий можно ознакомиться в монографиях S.Kaczmarz, H.Steinhaus [41], И.Гохберга и М.Крейна [22], R.Young [220]. В последующем интерес к этому направлению возрос как с теоретической, так и с практической точки зрения. Для бесселевой последовательности $\{f_k\}$ для любого $\{c_k\} \in l_2$ безусловно сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$. Известны теорема Меньшова-Радемахера и теорема Пэли-Зигмунда о сходимости почти всюду в пространстве L_2 ряда по бесселевым системам. Одним из критериев бесселевости системы $\{f_k\}$ в пространстве $L_2(E)$ является теорема Шура, где E - измеримое множество. Аналоги теоремы Меньшова-Радемахера, теоремы Пэли-Зигмунда и теоремы Шура были получены в работе С.Я.Новикова [61]. В дальнейшем понятия бесселевых систем, гильбертовых систем и базиса Рисса были обобщены в различных направлениях на банаховы пространства в работах Б.Е.Вейца [17], З.А.Чантурия [104], I.Singer [212], Б.Т.Билалова [8] и П.А.Терехина [69]. Несчетные обобщения бесселевых, гильбертовых систем и базисов Рисса в банаховых пространствах не рассматривалась. Этот вопрос изучается в работе автора [166], в которой введены несчетные обобщения этих понятий, доказаны их критерии и приведены примеры. В банаховых пространствах относительно банахово пространства K числовых последовательностей, с каноническим базисом, в работе Б.Т.Билалова и З.Г.Гусейнова [14] для минимальной системы введены понятия, обобщающие соответствующие классические понятия и получены все соответствующие результаты Н.К.Бари, а в работе П.А.Терехина [69] рассматривается бесселевость произвольной системы, обобщены критерий бесселевости Н.К.Бари и теорема Шура. Гильбертовость произвольных систем и их связи с бесселевыми системами не были изучены. Этот вопрос изучается в первой главе диссертационной работы.

Теория рядов Фурье является одним из основных направлений гармонического анализа. Многие задачи спектральной теории дифференциальных операторов, а также смешанные задачи теории уравнений в частных производных, механики, математической физики, теории упругости и других областей математики решаются применением метода Фурье. Этому направлению посвящены работы многих, авторов (см. например, A.Ashyralyev, D.Arjmand [84], A.Ashyralyev, K.Belakroum, A.Guezane-Lakoud [85], M.Kudu, I.Amirali [188], J.Nagumo, S.Arimoto, S.Yoshizawa [196], M.Jamaguti [178], J.M.Greenberg [143], P.L.Davis [119], А.И.Кожанов [48], О.А.Ладыженская [51], Р.С.Жамалов [25], К.И. Худавердиев [74], К.И.Худавердиев, А.А.Велиев [75] и др.). Для обоснования метода Фурье требуется изучение базисных свойств системы собственных и присоединенных функций соответствующего дифференциального оператора в рассматриваемом пространстве. Поэтому вопрос изучения базисности систем в различных банаховых пространствах представляет самостоятельный научный интерес. Теории базисов посвящены монографии известных математиков, например, I.Singer [212], С.Качмажа и Г.Штейнгауса [41], Ch.Heil [149], R.Young [220], O.Christensen [109], Б.Т.Билалова [8] и др. Один из важных направлений теории базисов является близкие базисы. В работе Б.Е.Вейца [17] введено понятие p-базиса в банаховых пространствах и получены результаты об изоморфной p-базисности Бесселя. В пространстве $L_2(-\pi,\pi)$ известна теорема Пэли-Винера о базисности возмущенной системы экспонент $\left\{e^{i\lambda_n t}\right\}_{n\in Z}$, при условии $\sup_n\left|\lambda_n - n\right| < \frac{1}{\pi^2}$. Окончательный результат в этом направлении принадлежит М.Кадецу и он известен как теорема $\frac{1}{4}$-Кадеца. Аналоги теоремы $\frac{1}{4}$-Кадеца на языке мультипликаторов в пространстве $L_p(-\pi,\pi)$ и для систем синусов и косинусов в $L_2(0,\pi)$ были получены Б.Т.Билаловым [8, 10]. Подобные результаты были изучены в работах X.He, H.Volkmer [148], M.Horvath [153], Y.I.Lyubarskii, S.Kristian [190], R.M.Young [220] и др. Следует отметить, что в банаховых пространствах относительно изоморфных базисов известны теорема Пэли-Винера, Крейна-Рутмана-Мильмана, теорема Birkhof-Rota. Аналогичные результаты могут использоваться и для получения разложений по тем или иным системам с векторнозначными коэффициентами, возникающие при решении дифференциальных уравнений, методом Фурье, задач в тензорных произведениях пространств и др.. Поэтому, исходя из факта, что произведение скаляра на вектор линейного пространства является билинейным отображением, представляет интерес изучения устойчивости базисов, ассоциированных билинейными отображениями. В диссертационной работе основные теоремы близких базисов обобщены на случай b -базисов.

Понятие фрейма было введено в 1952 году R.J.Duffin и A.C.Schaeffer [124] при изучении негармонических рядов Фурье относительно возмущенной системы экспонент. В этой основополагающей работе устанавливаются некоторые свойства фреймов из возмущенной системы экспонент $\{e^{i\lambda_n t}\}$, $t \in [-\pi, \pi]$. Там же дается общее определение абстрактного фрейма в сепарабельных гильбертовых пространствах и получены в этом случае некоторые фреймовые свойства возмущенной системы экспонент. Бурное развитие теории фреймов началась во второй половине 80-х годов после основополагающих работ И.Добеши [117], И.Добеши, А.Гросмана, И.Мейера [118], С.Малата [191] и др. с возникновением и развитием теории вейвлет. В последующем, в связи с важными приложениями, интерес к этому направлению сильно возрос и этой теории были посвящены многочисленные работы авторов Н.М.Астафьева [2], И.М.Дремин, О.В.Иванов, В.А.Нечитайло [123], К.Чуи [112] и др. Фреймы находят важные приложения в сигнальных процессах, сжатии и обработки информации, характеризации функциональных пространств и в других областях математики. Более подробно этими сведениями можно познакомиться из монографий Е.Ковачевич, А.Чебира [185], И.Добеши [117], М.Фрейзер [72], К.Чуи [112], O.Christensen [109], R.Young

[220], Ch.Heil [149] и обзорных статьей I.Daubechies, A.Grossman, Y.Meyer [118], P.G.Casazza, D.Han, D.Larson [107], K.Gröchenig [144], O.Christensen, Ch.Heil [110], O.Christensen, D.Stoeva [111], B.T.Bilalov, F.A.Guliyeva [92] и др. Наиболее близкие в некотором смысле к ортонормированным базисам являются жесткие фреймы. Жесткие фреймы изучались в работах В.Я.Козлова [47], P.G.Casazza, O.Christensen [105], Б.С.Кашина, Т.Ю.Куликова [42], С.Я.Новикова [61]. Одним из важных направлений теории фреймов является обобщение фреймов в гильбертовых и банаховых пространствах. Рассматривая подпространства гильбертового пространства для системы линейных ограниченных операторов, действующих из гильбертового пространства на подпространства W.Sun [215] было введено понятие g-фрейма и на этот случай перенесены многие свойства обычных фреймов. В работе Б.Т.Билалова, Ф.А.Гулиева [93] введено понятие t-фрейма в тензорных произведениях гильбертовых пространств. Другим обобщением фреймов являются непрерывные фреймы в гильбертовых пространствах введенные и изученные в работе S.T.Ali, J.P.Antoine, J.P.Gazeau [80]. В этом направлении известны работы A.Rahimi, B.Daraby, Z.Darvishi [203], A.Rahimi, A.Najati, Y.N.Dehghan [204]. На случай банаховых пространств фреймы были обобщены в различных направлениях. Фреймы в банаховых пространствах впервые были изучены K.Gröchenig [144] в 1991 году. В этой работе введены и изучены понятия банахова фрейма и атомарного разложения в банаховых пространствах. Фреймы в банаховых пространствах относительно пространства K числовых последовательностей, в котором система канонических ортов образует базис, изучался в работах Б.Т.Билалова [8] и П.А.Терехина [70]. В работе P.Casazza, D.Han, D.Larson [107] фреймы в банаховых пространствах определяются как проекции безусловных базисов объемляющего банахова пространства. A.Aldrobi, Q.Sun, W.Tag [79] в лебеговых пространствах L_p введены и изучены понятия p-фрейма и атомарного разложения относительно shirt invariant подпространств L_p. p-фреймы в банаховых пространствах также изучались в

работе O.Christensen, D.T.Stoeva [111]. В [111] введено понятие q-Рисс базиса, обобщающее понятие базиса Рисса и установлены их связи с p-фреймами. Распространение этой идеи на случай общих банаховых пространств числовых последовательностей изучалась P.G.Casazza, O.Christensen и D.T.Stoeva [106]. Важным направлением теории фреймов является изучение методов получения фреймов. Одним из таких методов является метод возмущения фреймов. В этом направлении известны результаты в контексте классической теоремы Пэли-Винера. По поводу этих результатов можно посмотреть монографии R.Young [220], Ch.Heil [149], O.Christensen [109] и статьи R.Balan [86], O.Christensen и Ch.Heil [110], P.G.Casazza и O.Christensen [105]. Нетеровы возмущения фреймов и атомарных разложений в банаховых пространствах изучалась в работе Б.Т.Билалова, Ф.А.Гулиева [93]. Обобщения g-фреймов на банаховы пространства изучалась в работах M.R.Abdollahpour, M.H.Faroughi и A.Rahimi [77]. В работе [77] введено понятие pg-фрейма в банаховых пространствах, изучены их некоторые свойства и вопрос устойчивости. В третьей главе диссертационной работы введено понятие b-фреймов в гильбертовых и банаховых пространствах относительно банаховых пространств векторнозначных последовательностей и на этот случай перенесены многие свойства, а также результаты об устойчивости фреймов.

Одним из важных направлений теории рядов Фурье является направление, связанное с коэффициентами Фурье. В этом контексте хорошо известны равенство Парсеваля и теорема Рисса-Фишера. Обобщением теоремы Рисса-Фишера в пространствах L_p, $p \neq 2$, является теорема Хаусдорфа-Юнга, доказанная В.Г.Юнгом и Ф.Хаусдорфом для классической системы экспонент. Аналогичный факт для общих ортогональных и равномерно ограниченных систем в пространствах L_p, $p \neq 2$, получен Ф.Риссом. Аналог теоремы Хаусдорфа-Юнга для преобразования Фурье изучалась в работах Е.Титчмарша [216], К.И.Бабенко [4], У.Бекнер [88]. По поводу соотношения между функцией и ее коэффициентов ряда Фурье также известна теорема Харди-Литтлвуда для тригонометрических систем. Этот результат для ортогональных и равномерно ограниченных систем изучался в работе Пэли [200]. Более подробно об этих сведениях можно познакомится из монографий S.Kaczmarz, H.Steinhaus [41], А.Зигмунда [26], Г.Г.Харди, Дж.И.Литтлвуд, Г.Полиа [73], R.Young [220] и др. Теорема Харди-Литтлвуда-Пэли в Лоренцовых пространствах L_{pq} при $p=2$ изучалась С.В.Бочкаревым [16] и Е.Д.Нурсултановым [62], а при $p \neq 2$ изучалась И.Стейном [213]. Аналоги теорем Рисса и Харди-Литтлвуда-Пэли для рядов Фурье с векторнозначными коэффициентами изучались в работах J.Petre [201], O.Blasco, A.Pelczyski [102]. Представляет интерес изучение аналогичных вопросов в обычных и обобщённых Лебеговых пространствах со смешанной нормой. В четвертой главе диссертационной работы доказаны аналоги теорем Рисса и Пэли в Лебеговых пространствах со смешанной нормой и в Лебеговых пространствах с переменным показателем суммируемости, полученные результаты применены для классической системы экспонент, а также к установлению существования и единственности обобщенного решения смешанной задачи для одного класса дифференциального уравнения третьего порядка в пространстве $B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}$, $p \geq 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Полученные результаты являются p-обобщениями соответствующих результатов работы К.И.Худавердиева и А.А.Велиева [75] в пространстве $B_{2,2,T}^{2,1}$. Среди работ, посвященных обычным и обобщённым Лебеговым пространствам со смешанной нормой, можно отметить работы Н.Р.Но [151, 152] и Р.А.Бандалиева [87].

В последнее время в связи с приложениями в теории уравнений в частных производных, в теории аппроксимации, в гармоническом анализе и в других различных областях математики возрос интерес к изучению задач в нестандартных пространствах функций. К таким пространствам относятся пространство Лебега с переменным показателем суммируемости, пространство Компанато, пространство Морри, пространство гранд Лебега и др. Вопросы анализа в разной степени изучены в этих пространствах. Так, например, вопросы аппроксимации по сравнению с пространствами Морри и гранд Лебега, хорошо изучены в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости. Отметим, что Лебеговы пространства $L^{p(\cdot)}$ с переменным показателем суммируемости возникали при изучении задач теории упругости, динамики жидкостей, вариационного исчисления и др. Большой вклад в развитии этой теории внесли W.Orlicz [199], J.Musielak и W.Orlicz [195], И.И.Шарапудинов [210], A.Fiorenza и M.Krbec [133], D.Edmunds и J.I.R´akosnik [126], L.Diening и S.Samko [122] и др. Топология пространства $L^{p(\cdot)}$ изучалась в работе И.И.Шарапудинова [211]. Работы S.Samko [207] и L.Diening [120] послужили развитию изучений гармонического анализа и теории потенциала в пространствах $L^{p(\cdot)}$. Следует отметить, что в работе S.Samko [207] изучалась ограниченность потенциала Рисса, а в работе L.Diening [120] ограниченность максимального оператора Харди-Литтлвуда. Ограниченность сингулярного оператора и преобразования Гильберта в пространствах $L^{p(\cdot)}$ изучалась в работе V.M.Kokilashvili, A.Meskhi, H.Rafeiro и S.Samko [183]. Более подробно о свойствах и приложениях пространств $L^{p(\cdot)}$ можно ознакомиться из монографий D.V.Cruz-Uribe, A.Fiorenza [114], L.Diening, P.Harjulehto, P.Hästö, M.Rûzička [121], X.L.Fan, D.Zhao [128] и из обзорных статей D.E.Edmunds, A.Meskhi [125], F.Xianling, Z.Dun [219], B.T.Bilalov, Z.G.Guseynov [89, 94] и т.д. Вопросы гармонического анализа и аппроксимации в пространствах Морри изучались в работах авторов D.R.Adams [78], V.M.Kokilashvili, A.Meskhi, H.Rafeiro, S.Samko [183], N.Samko [206], Б.Т.Билалова [12], B.T.Bilalov, T.B.Gasymov, A.A. Guliyeva [90], C.B.Morrey [194], D.Israfilov, N.P.Tozman [174, 175]. Касающиеся вопросы в пространствах гранд Лебега изучались в работах A.Fiorenza [131], A.Fiorenza, G.E.Karadzhov [132], B.Gupta, A.Fiorenza и P.Jain [145], T.Iwaniec и C.P.Sbordone [176] и др. Пространства гранд Лебега были введены T.Iwaniec и C.Sbordone [177] в 1992 году в связи с изучением свойства интегрируемости определителя якобиана в открытом ограниченном множестве. В работах автора [167, 222] изучается базисность классической системы экспонент и тригонометрических систем синусов и косинусов в подпространствах пространств гранд Лебега, и в подпространствах весовых пространств гранд Лебега, порожденных оператором сдвига.

Одним из важных вопросов спектральной теории дифференциальных операторов является изучение спектральных задач со спектральным параметром в граничных условиях. Основополагающими результатами в этом направлении являются работы авторов Л.Релей, Ж.Д.Тамаркин, Р.Е.Лангер, Л.Коллатц и др. Задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях рассматривались в работах J.Walter [217], A.Schneider [208], C.T.Fulton [137], D.B.Hinton [150]. Общая теория краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка, когда спектральный параметр входит в краевые условия полиномиально была построена в работе А.А.Шкаликова [76]. В работах Е.И.Моисеева и Н.Ю.Капустина [37-39] для задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром входящее в граничные условия линейно, рассматривались вопросы базисности систем из собственных функций в лебеговых пространствах. Различные обобщения в этом направлении изучались в работах Н.Б.Керимова и З.С.Алиева [44], Н.Б.Керимова и В.С.Мирзоева [45] и др. В абстрактном виде вопрос дефектной базисности рассматривался в работе Б.Т.Билалова и Т.Р.Мурадова [97]. В работе Т.Б.Касумова [40] в абстрактной постановке найден критерий относительно дефектной базисности систем в банаховых пространствах.

Наряду с этим следует отметить, что разрывные спектральные задачи со спектральным параметром в граничных условиях с точки зрения приложений тоже имеют отдельный научный интерес. По поводу касающихся вопросов можно рассмотреть, например, монографии Ф.Б.Аткинсона [3], Л.Коллатца [49] и М.А.Расулова [66]. Спектральная задача, ассоциированная с задачей колебания нагруженной струны в лебеговых пространствах L_p изучалась в работах Т.Б.Касумова и Ш.Дж.Маммедова [141], Т.Б.Касумова и А.А.Гусейнли [140], Б.Т.Билалова, Т.Б.Касумова и Г.В.Магеррамова [91], а в весовых лебеговых пространствах со степенным весом в работе Т.Б.Касумова, А.М.Ахтямова и Н.Р.Ахмедзаде [139]. В пятой главе диссертационной работы эта же задача рассматривается в пространствах гранд Лебега и в весовых пространствах гранд Лебега с общим весом. Следует отметить, что вопросы базисности систем из собственных функций даже в весовых пространствах Лебега с общим весом, по видимому не изучены. Спектральные свойства разрывного дифференциального оператора также изучалась в работах В.М.Курбанова и Э.Дж.Ибадова [46], A.M.Gomilko и V.N.Pivovarchik [142].

Отметим, что спектральные свойства для пучков несамосопряженных дифференциальных операторов изучались в работах Я.Д.Тамаркина [68], М.Б.Келдыша [43], Дж.Э.Аллахвердиева и А.М.Ахмедова [1], М.Б.Гасымова [20], А.С.Маркуса [55], М.Г.Крейна и Г.К.Лангер [50], М.Б.Оразова и А.А.Шкаликова [64], С.С.Мирзоева [57] и др.

Одним из методов изучения базисных свойств возмущенных тригонометрических систем является метод краевых задач Римана. Отметим, что критерий базисности системы $\left\{e^{i(n+\alpha\, sign n)t}\right\}$ в случае $\alpha \in R$ получен в работе А.М.Седлетцкого [67], а для тригонометрических систем синусов и косинусов с тем же возмущением в работе Е.И.Моисеева [58, 59]. Случай $\alpha \in C$ был рассмотрен Г.Г.Девдариани [24]. Базисные свойства классической системы экспонент с вырождающимися коэффициентами изучались в работах К.И.Бабенко [4], В.Ф.Гапошкина [19], А.Н.Барменкова [6], А.Н.Барменкова и Ю.А.Казьмина [7], Ю.И.Любарского [52], Ю.И.Любарского и В.А.Ткаченко [53], Б.Т.Билалова [9-13] и др. Во многих из этих работ вопрос полноты и минимальности систем сводится к разрешимости в классах Харди различных краевых задач Римана на границе соответствующей области. Более подробно относительно теории краевых задач и методах их решений можно ознакомиться в монографиях, например, Ф.Д.Гахова [21], Н.И.Мусхелишвили [60], А.В.Бицадзе [15]. Теория задач Римана в L_p-постановках разработана в монографии И.И.Данилюка [23]. Следует отметить, что идея использования краевых задач Римана при изучении аппроксимативных свойств возмущённых тригонометрических систем принадлежит А.В.Бицадзе [15]. Этот метод был успешно применен С.М.Пономаревым [65] и Е.И.Моисеевым [58, 59] при установлении базисных свойств тригонометрических систем с линейной фазой в лебеговых пространствах функций. Дальнейшее развитие этого метода при изучении базисных свойств специальных систем функций принадлежит Б.Т.Билалову [9-13]. Отметим, что краевая задача в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости была изучена в работе B.T.Bilalov, Z.G.Guseynov [89], а в пространствах Морри в работе Б.Т.Билалова [12]. В работе V.M.Kokilashvili, A.Meskhi, V.Paatashvili [182] краевая задача была изучена в подпространстве пространства гранд Лебега функций представимых по формуле Коши. Базисность возмущенной системы экспонент в пространствах гранд Лебега и краевая задача в пространствах гранд Харди в общей постановке не рассматривалась. Изучение базисности возмущенной системы экспонент в пространствах гранд Лебега методом краевых задач требует определения классов гранд Харди и разрешимости в них краевых задач Римана. Последняя глава диссертационной работы посвящена изучению этих вопросов.

Таким образом, объектами изучения в диссертационной работе являются: несчетные бесселевы и гильбертовы системы в несепарабельных банаховых пространствах, бесселевы, гильбертовы системы, базисы Рисса и фреймы в гильбертовых и банаховых пространствах, ассоциированные билинейными отображениями относительно банахова пространства последовательностей векторов, аналоги и обобщения теорем Рисса и Пэли для векторнозначных коэффициентов рядов Фурье по ортогональной и равномерно ограниченной системе функций в пространствах Лебега со смешанной нормой и в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости, базисность классических системы экспонент и тригонометрических систем синусов и косинусов в подпространствах $G_{p)}$ гранд Лебега, порожденные оператором сдвига, аналоги теорем Коровкина и их статистические варианты в пространствах $G_{p)}$, базисность системы собственных функций одной разрывной спектральной задачи для дифференциального уравнения второго порядка в $G_{p)}$ и в их весовых вариантах с весом общего вида, классы гранд Харди и аналоги касающихся известных фактов и вопросы разрешимости задач Римана в классах гранд Харди и вопрос базисности возмущенной системы экспонент в $G_{p)}$.

По вышеизложенным соображениям считаем, что тема диссертационной работы является актуальной и представляет особый научный интерес.

Цель и задачи исследования. Основной целью и задачей диссертационной работы является получение различных аналогов и обобщений на различные банаховы пространства известных понятий как бесселевы, гильбертовы системы, базисы Рисса и фреймы, получение аналогов теорем Рисса и Пэли в пространствах Лебега со смешанной нормой и в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости, изучение базисности классических системы экспонент и тригонометрических систем синусов и косинусов в подпространствах $G_{p)}$ гранд Лебега, порожденные оператором сдвига, получение аналогов теорем Коровкина и их статистических вариантов в пространствах $G_{p)}$, изучение базисности системы из собственных функций одной разрывной спектральной задачи для дифференциального уравнения второго порядка в $G_{p)}$ и в их весовых вариантах с весом общего вида, определение классов гранд Харди, установление аналогов некоторых классических фактов и изучение вопросов разрешимости краевых задач Римана в классах гранд Харди, а также изучение базисных свойств возмущенной системы экспонент в пространствах гранд Лебега.

Методы исследования. В диссертации были использованы методы теории функционального анализа, теории фреймов, теории базисов, теории рядов Фурье, теории функций, теории гармонического и комплексного анализов, теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории краевых задач для аналитических функций.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие основные положения:

1. характеризация бесселевых, гильбертовых систем, базисов Рисса и фреймов в гильбертовых и банаховых пространствах, ассоциированных билинейными отображениями.
2. несчетные обобщения бесселевых и гильбертовых систем в несепарабельных банаховых пространствах;
3. возмущения и устойчивости базисов и фреймов, ассоциированных билинейными отображениями;
4. получение аналогов и обобщений теорем Рисса и Пэли в пространствах Лебега со смешанной нормой и в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости;
5. вопросы существования и единственности обобщенного решения смешанной задачи для одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка в пространстве $B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}$ (q, p - сопряженные числа), $p \geq 2$;
6. вопросы базисности классических системы экспонент и тригонометрических систем синусов и косинусов в подпространствах $G_{p)}$ гранд Лебега, порожденные оператором сдвига;
7. вопросы базисности системы собственных функций одной разрывной спектральной задачи для дифференциального уравнения второго порядка в $G_{p)}$ и в весовых вариантах с весом общего вида;
8. получение аналогов теорем Коровкина и их статистических вариантов в $G_{p)}$;
9. определение классов гранд Харди, получение аналогов теорем Рисса, Смирнова и изучение вопроса разрешимости краевых задач Римана в классах гранд Харди;
10. установление базисных свойств возмущенной системы экспонент в пространствах гранд Лебега.

Научная новизна исследования. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. введены понятия *ь*-бесселевых, *ь*-гильбертовых последовательностей, *ь*-базисов Рисса и *ь*-фреймов в гильбертовых и в банаховых пространствах относительно банаховых пространств последовательностей векторов, обобщающие классические понятия и изучены их характеризации;
2. введены понятия несчетных бесселевых и гильбертовых систем в несепарабельных банаховых пространствах и доказаны аналоги классических результатов в этом случае, а также приведены соответствующие примеры;
3. получены обобщения теорем возмущения и устойчивости базисов и фреймов относительно *ь*-базисов и *ь*-фреймов в гильбертовых и в банаховых пространствах;
4. найдены аналоги теорем Рисса и Пэли в пространствах Лебега со смешанной нормой и в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости, с помощью которых установлено существование и единственность обобщенного решения смешанной задачи для одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка в пространстве $B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}$ (q, p - сопряженные числа), $p \geq 2$, справедливость которых вообще говоря не следует из соответствующих результатов при $p = 2$;
5. доказаны базисности классических системы экспонент и тригонометрических систем синусов и косинусов в подпространствах $G_{p)}$ гранд Лебега, порожденные оператором сдвига;
6. доказана базисность системы собственных функций дифференциального оператора одной разрывной спектральной задачи в прямой сумме пространств $G_{p)} \oplus C$, где C – комплексная плоскость;
7. доказана ограниченность сингулярного оператора в весовом пространстве $G_{p),\rho}$ в случае, когда весовая функция удовлетворяет условию Макенхоупта;
8. доказана базисность системы собственных функций одной разрывной спектральной задачи для дифференциального уравнения второго порядка в весовом пространстве $G_{p),\rho}$ с весом общего вида;

9. определены классы гранд Харди $H_{p)}$, установлены аналоги теорем Рисса, Смирнова и изучены вопросы разрешимости краевых задач Римана в классах гранд Харди;
10. полученные результаты применены к установлению базисности системы экспонент с линейной фазой в подпространствах гранд Лебега $G_{p)}$.

Теоретическая и практическая ценность исследования. Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в спектральной теории дифференциальных операторов, в теории уравнений в частных производных, в теории аппроксимации, в теории фреймов и близких базисов, в гармоническом анализе.

Апробация и применение. Основные результаты диссертации докладывались на общеинститутском семинаре ИММ НАН Азербайджана (рук. член–корр. НАНА, проф. М.Дж.Марданов), на семинарах отделов ИММ НАН Азербайджана «Негармонический анализ» (рук. чл.-корр. НАНА, проф. Б.Т.Билалов), «Дифференциальные уравнения» (рук. проф. А.Б.Алиев), на семинаре кафедры «Теория функций и функционального анализа» БГУ (рук. проф. А.М.Ахмедов), на семинаре кафедры «Математический анализ» БГУ (рук. проф. С.С.Мирзоев), на Международной конференции, посвященной 85-летию проф. Я.Дж.Мамедова (Баку, 2015 г.), на 12-й Международной конференции по математике и механике, посвященной 80-летнему юбилею академика Ф.Г.Максудова (Баку, 2010 г.), на Международной конференции, посвященной 80-летнему юбилею академика НАНА А.Д.Гаджиева (Баку, 2017 г.), на Международной конференции «Функциональный анализ и его приложения», посвященной 100-летнему юбилею академика З.И.Халилова (Баку, 2011 г.), на Международной конференции «Теория функций и проблемы гармонического анализа», посвященной 100-летнему юбилею академика И.И.Ибрагимова (Баку, 2012 г.), на 19-й Саратовской зимней школе «Современные проблемы Теории функций и их приложения» посвященной 90-летию со дня рождения П.Л.Ульянова (Саратов, 2018 г.), на Международной конференции

«Операторы, функции и системы в математической физике», посвященной 70-летию проф. Г.А.Исаханлы (Баку, 2018 г.), на Международной конференции Workshop «Негармонический анализ и дифференциальные уравнения» (Баку 2016 г.), на 2-ой Международной конференции "Mathematical advances and applications" (Istanbul, 2019).

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа. Работа выполнена на отделе «Негармонический анализ» Института Математики и Механики НАНА Азербайджана и на кафедре «Теория функций и функциональный анализ» Бакинского Государственного Университета.

Структура и объем диссертации (в знаках, с указанием объема каждого структурного подразделения в отдельности). Общий объем диссертационной работы – 173677 знаков (титульная страница – 403 знаков, оглавление – 3319 знаков, введение – 48953 знаков, первая глава – 32886 знаков, вторая глава – 9157 знаков, третья глава – 26218 знаков, четвертая глава – 10001 знаков, пятая глава – 23434 знаков, шестая глава – 19306 знаков). Список используемой литературы состоит из 226 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из введения, шести глав и списка используемой литературы.

Во введении описана краткая история касающихся к теме диссертационной работы вопросов, обосновывается актуальность темы диссертационной работы и излагаются основные результаты диссертации.

Глава I, состоящая из шести параграфов, посвящена обобщению бесселевых, гильбертовых последовательностей и базисов Рисса в гильбертовых пространствах относительно банахова пространства последовательностей векторов при билинейных отображениях.

В 1.1 приведены стандартные обозначения, основные понятия теории базисов при билинейных отображениях.

Пусть X, Y и Z - банаховы пространства. Рассмотрим билинейное отображение $b(x,y): X \times Y \to Z$, удовлетворяющее условию

$$\exists M, m > 0: \quad m\|x\|_X \|y\|_Y \le \|b(x,y)\|_Z \le M\|x\|_X \|y\|_Y, \ \forall x \in X, \ y \in Y.$$

Пусть $Y_0 \subset Y$ некоторое множество. Обозначим через $L_b(Y_0)$ совокупность всевозможных конечных сумм $\sum_n b(x_n, y_n)$, где $x_n \in X$, $y_n \in Y_0$.

Определение 0.0.1 ([8]). *Система* $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ *называется* b*-полной в* Z, *если* $\overline{L_b(\{y_n\}_{n\in N})} = Z$.

Система $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ *называется* b*-минимальной в* Z, *если выполняется условие* $\forall x \in X$ $(x \ne 0)$, $k \in N$ $b(x, y_k) \notin \overline{L_b(\{y_n\}_{n\in N, n\ne k})}$.

Системы $\{y_n\}_{n\in N}$ *и* $\{y_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z, X)$ *называются* b*- биортогональными, если* $\forall k, n \in N$, $x \in X$ $y_n^*(b(x, y_k)) = \delta_{nk} x$, *при этом* $\{y_n^*\}_{n\in N}$ *называется* b*-биортогональной системой к* $\{y_n\}_{n\in N}$.

Система $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *называется* ω*-*b*-линейно независимой в* Z, *если из* $\sum_{n=1}^{\infty} b(x_n, \varphi_n) = 0$ *следует, что* $x_n = 0$, $\forall n \in N$.

Система $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *называется* b*-базисом в* Z, *если для* $\forall z \in Z$ *существует единственная последовательность* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$, *такая, что* $z = \sum_{n=1}^{\infty} b(x_n, \varphi_n)$.

Справедлив следующий критерий b-базисности.

Теорема 0.0.1([8]). *Система* $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *является* b*-базисом в* Z *тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

1) $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ *-* b*-полна в* Z*;*

2) $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ *имеет* b*-биортогональную систему* $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$*;*

3) система проекторов $P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} b(\varphi_k^*(z), \varphi_k))$ *равномерно ограничена, т. е.* $\exists C > 0$: $\|P_n(z)\| \le C\|z\|$, $\forall n \in N$, $\forall z \in Z$.

Пусть $\hat{X}$ - некоторое банахово пространство последовательностей $\hat{x} = \{x_n\}_{n\in N}$, $x_n \in X$, с покоординатными линейными операциями. $\hat{X}$ назовем KB-пространством, если линейные операторы $\hat{e}_n : X \to \hat{X}$, $\hat{e}_n(x) = \{\delta_{in} x\}_{i\in N}$, $e_n : \hat{X} \to \hat{X}$, $e_n(\hat{x}) = \{\delta_{in} x_n\}_{i\in N}$, $\hat{\delta}_n : \hat{X} \to X$, $\hat{\delta}_n(\hat{x}) = x_n$, $\hat{x} = \{x_n\}_{n\in N} \in \hat{X}$, $x \in X$, ограничены. $\hat{X}$ назовем CB-пространством, если подпространства $E_k = \{\hat{x} \in \hat{X} : x_n = 0, n \ne k\}$ образуют базис в $\hat{X}$.

Относительно пространства $\hat{X}^*$ справедлива

Лемма 0.0.1. *Пусть* $\hat{X}$ *- рефлексивное* CB*-пространство. Тогда сопряженное пространство* $\hat{X}^*$ *является* CB*-пространством.*

В параграфе 1.2 посредством билинейного отображения даются обобщения понятий бесселевых и гильбертовых последовательностей в гильбертовых пространствах, и доказываются их соответствующие свойства.

Пусть X, H - гильбертовы пространства, $\hat{X}$ - CB-пространство и билинейное отображение $\omega_b : H \times Y \to X$ определяется соотношением:

$$(b(x,y),h)_H = (x, \omega_b(h,y))_X, \; x \in X, h \in H, \; y \in Y .$$

В частности, при $X = C$, $Y = H$ и $b(\lambda, y) = \lambda y$ имеем $\omega_b(h,y) = (h,y)_H$.

Определение 0.0.2. *Системы* $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ *и* $\{y_n^*\}_{n\in N} \subset Y$ *назовем* b*-биортогональными в* H*, если* $\forall x \in X$ $\omega_b(b(x,y_k), y_n^*) = \delta_{nk} x$, $\forall k,n \in N$.

Пусть даны b - биортогональные в H системы $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ и $\{y_n^*\}_{n\in N} \subset Y$.

Определение 0.0.3. *Систему* $\{y_n\}_{n\in N}$ *назовем* b*-бесселевой (*$b_{\hat{X}}$*-бесселевой) в* H *относительно пространства* $\hat{X}$*, если при любом* $h \in H$, $\{\omega_b(h, y_n^*)\}_{n\in N} \in \hat{X}$.

Имеет место следующий критерий бесселевости систем.

Теорема 0.0.2. *Для того, чтобы система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}}$*-бесселевой в* H *необходимо, а в случае* b*-полноты системы* $\{y_n\}_{n\in N}$*, и достаточно существование оператора* $T \in L(H,\hat{X})$ *:* $T(b(x,y_n)) = \{\delta_{in}x\}_{i\in N}$ *,* $\forall x \in X$ *,* $\forall n \in N$ *.*

Определение 0.0.4. *Систему* $\{y_n\}_{n\in N}$ *назовем* b*-гильбертовой (*$b_{\hat{X}}$*-гильбертовой) в* H *относительно* $\hat{X}$*, если* $\forall \hat{x} \in \hat{X}$ *,* $\exists h \in H$ *:* $\{\omega_b(h,y_n^*)\}_{n\in N} = \hat{x}$ *.*

Имеет место критерий $b_{\hat{X}}$-гильбертовости систем $\{y_n\}_{n\in N}$.

Теорема 0.0.3. *Для того, чтобы система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}}$*- гильбертовой в* H *достаточно, а в случае* b*-полноты системы* $\{y_n^*\}_{n\in N}$*, и необходимо, чтобы* $\exists T \in L(\hat{X},H)$ *:* $T(\{\delta_{in}x\}_{i\in N}) = b(x,y_n)$*,* $\forall x \in X$ *,* $n \in N$ *.*

Из этих критерий в частности, при $X = C$, $Y = H = L_2(a,b)$ и $b(\lambda,y) = \lambda y$ следуют критерии бесселевости и гильбертовости полной минимальной системы $\{\psi_n\}_{n\in N}$ в $L_2(a,b)$, с полной биортогональной системой $\{g_n\}_{n\in N}$.

Следствие 0.0.1([5]). *Для того, чтобы система* $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *была бесселевой в* $L_2(a,b)$ *необходимо и достаточно, чтобы существовал оператор* $T \in L(L_2(a,b))$*, такой, что* $T(\psi_n) = \varphi_n$*,* $\forall n \in N$*, где* $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ *- некоторая ортонормированная система в* $L_2(a,b)$*.*

Следствие 0.0.2([5]). *Для того, чтобы система* $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *была гильбертовой в* $L_2(a,b)$ *необходимо и достаточно, чтобы существовал оператор* $T \in L(L_2(a,b))$*, такой, что* $T(\varphi_n) = \psi_n$*,* $\forall n \in N$*, где* $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ *- некоторая ортонормированная система в* $L_2(a,b)$*.*

В следующей теореме устанавливается связь между бесселевостью и гильбертовостью системы в гильбертовом пространстве.

Теорема 0.0.4. *Пусть системы* $\{y_n\}_{n\in N}$ *и* $\{y_n^*\}_{n\in N}$ b*-полны в* H*. Тогда для того, чтобы система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}}$*-гильбертовой в* H *необходимо и достаточно, чтобы* $\{y_n^*\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}^*}$*-бесселевой в* H*.*

В параграфе 1.3 при помощи билинейных отображений обобщаются базисы Рисса в гильбертовых пространствах, и устанавливаются соответствующие их связи с бесселевыми и гильбертовыми системами.

Определение 0.0.5. *b-базис $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ назовем b-базисом Рисса H относительно $\hat{X}$ ($b_{\hat{X}}$-базисом Рисса), если его пространство последовательностей коэффициентов совпадает с $\hat{X}$.*

Пусть $\{y_n\}_{n\in N}$ и $\{y_n^*\}_{n\in N}$ - пара b - биортогональных систем.

Справедлив следующий критерий $b_{\hat{X}}$-базисности Рисса в H.

Теорема 0.0.5. *Пусть системы $\{y_n\}_{n\in N}$ и $\{y_n^*\}_{n\in N}$ b-полны в H. Для того, чтобы $\{y_n\}_{n\in N}$ была $b_{\hat{X}}$-базисом Рисса в H, необходимо и достаточно, чтобы существовал ограниченно обратимый оператор $T \in L(H, \hat{X})$: $T(b(x, y_n)) = \{\delta_{in} x\}_{i\in N}$, $\forall x \in X$, $\forall n \in N$.*

Следствие 0.0.3. *Пусть $\{y_n\}_{n\in N}$ b-полна в H. Тогда для того, чтобы система $\{y_n\}_{n\in N}$ была $b_{\hat{X}}$-базисом Рисса в H, необходимо и достаточно, чтобы $\exists A > 0$ и $\exists B > 0$ такое, что для любого конечного набора $\{x_n\}$ имеет место соотношение*

$$A\|\{x_n\}\|_{\hat{X}} \le \left\|\sum_n b(x_n, y_n)\right\|_Z \le B\|\{x_n\}\|_{\hat{X}}.$$

В параграфе 1.4 исходя из билинейных отображений определяются понятия бесселевых и гильбертовых систем в банаховых пространствах относительно банахова пространства последовательностей векторов. Все классические результаты перенесены на этот случай.

Пусть X, Y и Z - банаховы пространства, $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ и $\{y_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z, X)$ - b - биортогональные системы.

Определение 0.0.6. *Систему $\{y_n\}_{n\in N}$ назовем b-бесселевой в Z относительно $\hat{X}$ ($b_{\hat{X}}$-бесселевой в Z), если $\forall z \in Z$ $\{y_n^*(z)\}_{n\in N} \in \hat{X}$.*

Имеет место следующий критерий $b_{\hat{X}}$-бесселевости.

Теорема 0.0.6. *Для того, чтобы система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}}$*-бесселевой в* Z *необходимо, а в случае* b*-полноты системы* $\{y_n\}_{n\in N}$*, и достаточно существование оператора* $T \in L(Z,\hat{X})$*:* $T(b(x,y_n)) = \{\delta_{in}x\}_{i\in N}$, $\forall x \in X$, $\forall n \in N$.

Определение 0.0.7. *Систему* $\{y_n\}_{n\in N}$ *назовем* b*-гильбертовой в* Z *относительно* $\hat{X}$ *(*$b_{\hat{X}}$ *-гильбертовой в* Z*), если* $\forall \hat{x} \in \hat{X}$ $\exists z \in Z$*:* $\hat{x} = \{y_n^*(z)\}_{n\in N}$.

Справедлив следующий критерий $b_{\hat{X}}$ -гильбертовости систем.

Теорема 0.0.7. *Для того, чтобы система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}}$*- гильбертовой в* Z *достаточно, а в случае полноты системы* $\{y_n^*\}_{n\in N}$*, и необходимо существование оператора* $T \in L(\hat{X},Z)$*:* $T(\{\delta_{in}x\}_{i\in N}) = b(x,y_n)$, $\forall x \in X$, $\forall n \in N$.

Определим отображение $b^* : Z^* \times Y \to X^*$ по формуле

$$b^*(f,y)(x) = f(b(x,y)),\ f \in Z^*,\ y \in Y,\ x \in X .$$

В частности, при $Y = L(Z,X)$ и $b(x,A) = A(x)$ имеем $b^*(f,A) = A^* f$.

В следующей теореме устанавливается связь между b -гильбертовостью и b^*-бесселевостью пары b -биортогональных систем.

Теорема 0.0.8. *Пусть* $\hat{X}$ *- рефлексивное* CB*-пространство, пространство* Z *- рефлексивно, система* $\{y_n\}_{n\in N}$ b *-полна в* Z *,* $\{y_n^*\}_{n\in N}$ *полна в* Z^**. Тогда для того, чтобы* $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}}$*-гильбертова в* Z *необходимо и достаточно, чтобы* $\{y_n^*\}_{n\in N}$ *была* $b^*_{\hat{X}^*}$*-бесселевой в* Z^*.

В параграфе 1.5 введены и изучены понятия бесселевых, гильбертовых систем без предположения минимальности систем, а также базисов Рисса в банаховых пространствах в контексте g -фреймов (см. [215]).

Пусть X и Z - банаховы пространства, $\hat{x}$ - KB-пространство последовательностей из векторов X. Рассмотрим систему операторов $\{g_k\}_{k\in N} \subset L(Z,X)$. Через $L_{X^*}(\{g_n\}_{n\in N})$ обозначается совокупность всевозможных конечных сумм вида $\sum_k x_k^* g_k$, где $x_k^* \in X^*$.

Определение 0.0.8. *Система* $\{g_k\}_{k\in N}$ *называется* g*-полной в* Z^**, если в норме* Z^* *имеет место равенство* $\overline{L_{X^*}(\{g_n\}_{n\in N})} = Z^*$.

Системы $\{g_k\}_{k\in N} \subset L(Z,X)$ *и* $\{\Lambda_j\}_{j\in N} \subset L(X,Z)$ *называются* g*-биортогональными, если выполняется условие* $g_k\Lambda_j = \delta_{kj}I_X$. *При этом система* $\{\Lambda_j\}_{j\in N} \subset L(X,Z)$ *называется* g*-биортогональной системой к* $\{g_k\}_{k\in N}$.

Система $\{g_k\}_{k\in N}$ *называется* g*-минимальной в* Z^**, если* $\forall x^* \in X^*$ *и* $\forall k \in N$ *имеет место соотношение* $x^* g_k \notin \overline{L_{X^*}(\{g_n\}_{n\neq k})}$.

Следующее понятие является обобщением бесселевых систем в гильбертовых и банаховых пространствах.

Определение 0.09. *Систему* $\{g_k\}_{k\in N}$ *назовем* $\hat{x}$*-бесселевой в* Z*, если* $\forall z \in Z$ *выполняется условие* $\{g_k(z)\}_{k\in N} \in \hat{X}$.

Имеет место следующий критерий $\hat{x}$-бесселевости.

Теорема 0.0.9. *Для того чтобы система* $\{g_k\}_{k\in N}$ *была* $\hat{x}$*-бесселевой в* Z*, необходимо и достаточно, чтобы существовал оператор* $U \in L(Z,\hat{X})$ *такой, что* $\hat{\delta}_n U = g_n$ *для любого* $n \in N$.

Следующее определение обобщает понятие гильбертовой системы в гильбертовых и банаховых пространствах.

Определение 0.0.10. *Систему* $\{g_k\}_{k\in N}$ *назовем* $\hat{x}$*-гильбертовой в* Z*, если* $\forall \{x_k\}_{k\in N} \in \hat{X}\ \exists z \in Z:\ g_k(z) = x_k$.

Приведем критерий $\hat{x}$-гильбертовости систем.

Теорема 0.0.10. *Для того, чтобы система* $\{g_k\}_{k\in N}$ *была* $\hat{x}$*-гильбертовой в* Z *достаточно, а в случае* g*-полноты* $\{g_k\}_{k\in N}$ *и необходимо, чтобы* $\exists T \in L(\hat{X},Z)$: $g_n T = \hat{\delta}_n$, $\forall n \in N$.

Следующая теорема устанавливает связь между $\hat{x}$-бесселевостью и $\hat{x}$-гильбертовостью системы.

Теорема 0.0.11. *Пусть* $\hat{X}$ *- рефлексивное* CB*-пространство,* Z *- рефлексивно. Для того, чтобы* $\{g_k\}_{k\in N}$ *была* $\hat{X}$*-гильбертовой в* Z *достаточно, а в случае* g*-полноты* $\{g_k\}_{k\in N}$ *и необходимо, чтобы выполнялись условия:*

1) $\{g_k\}_{k\in N}$ *имеет* g*-биортогональную систему* $\{\Lambda_k\}_{k\in N} \subset L(X,Z)$*;*

2) система $\{\Lambda_k^*\}_{k\in N}$ *является* $\hat{X}^*$*-бесселевой в* Z^**.*

Определение 0.0.11. *Система* $\{g_k\}_{k\in N}$ *называется* $\hat{X}^*$*-Рисс* g*-базисом в* Z^**, если* $\{g_k\}_{k\in N}$ g*-полна в* Z^* *и существуют* $A>0$ *и* $B>0$ *такие, что*

$$A\left\|\hat{x}^*\right\|_{\hat{X}^*} \le \left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k^* g_k\right\|_{Z^*} \le B\left\|\hat{x}^*\right\|_{\hat{X}^*}, \ \forall \hat{x}^* \in \hat{X}^*.$$

A *и* B *называются нижней и верхней границами* $\hat{X}^*$*-Рисс* g*-базиса* $\{g_k\}_{k\in N}$*.*

Справедлива следующая

Теорема 0.0.12. *Пусть* $\hat{X}$ *- рефлексивное* CB*-пространство,* Z *- рефлексивно и система* $\{g_k\}_{k\in N}$ g*-полна в* Z^**. Для того, чтобы система* $\{g_k\}_{k\in N}$ *была* $\hat{X}^*$*-Рисс* g*-базисом в* Z^* *необходимо, и достаточно, чтобы* $\{g_k\}_{k\in N}$ *одновременно была* $\hat{X}$*-бесселевой и* $\hat{X}$*-гильбертовой системой.*

В параграфе 1.6 даются понятия несчетных бесселевых и гильбертовых систем в несепарабельных банаховых пространствах и доказываются соответствующие критерии.

Пусть X - несепарабельное банаховое пространство, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset X$ и $\{x_\alpha^*\}_{\alpha\in I} \subset X^*$ - пара биортогональных систем, I - несчетное множество индексов. Пусть K - несепарабельное банахово пространство систем из скаляров.

Следующие понятия являются несчетными обобщениями пары биортогональных бесселевых и гильбертовых последовательностей в банаховых пространствах.

Определение 0.0.12. *Систему* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *назовем несчетным* K*-бесселевым в* X*, если для* $\forall x \in X$ *имеет место включение* $\{x_\alpha^*(x)\}_{\alpha\in I} \in K$*. Систему* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$

назовем несчетным K*-гильбертовым в* X *, если для* $\forall\lambda=\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}\in K$ *существует* $x\in X$ $:\lambda=\{x_\alpha^*(x)\}_{\alpha\in I}$.

Пусть K имеет несчетный безусловный базис $\{\delta_\alpha\}_{\alpha\in I}$. В следующей теореме приводится критерий несчетной K-бесселевости систем.

Теорема 0.0.13. *Для того, чтобы система* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *была несчетным* K*-бесселевым в* X *необходимо, а в случае полноты* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *в* X *, то и достаточно существование оператора* $T\in L(X,K)$ *:* $Tx_\alpha=\delta_\alpha$, $\forall\alpha\in I$.

Сформулируем критерий несчетной K-гильбертовости систем.

Теорема 0.0.14. *Для того, чтобы система* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *была* K*-гильбертовым в* X *достаточно, а в случае полноты* $\{x_\alpha^*\}_{\alpha\in I}$ *в* X^**, то и необходимо существование оператора* $T\in L(K,X)$ *:* $T\delta_\alpha=x_\alpha$, $\forall\alpha\in I$.

Пример 0.0.1. Пусть $e_\alpha(t)=e^{i\alpha t}$, $t\in R$. Положим $V=span\{e_\alpha\}_{\alpha\in R}$. Через V_p, $1\le p<+\infty$, обозначим нормированное пространство V с нормой

$$\|x\|_{V_p}=\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $L_p^V(R)$ - пополнение пространства V_p. Пространство $L_p^V(R)$ - несепарабельно. Рассмотрим в $L_p^V(R)$ линейный непрерывный функционал: e_α^*

$$e_\alpha^*(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)e^{-i\alpha t}dt.$$

Система $\{e_\alpha\}_{\alpha\in R}$ при $p\ge 2$ является несчетной $l_p(R)$-бесселевой, а при $p\le 2$ является несчетной $l_p(R)$-гильбертовой в $L_p^V(R)$.

Глава II, состоящая из трех параграфов, посвящена изучению обобщений результатов относительно изоморфных и близких базисах в банаховых пространствах относительно b-базисов.

В параграфе 2.1 изучаются свойства b-изоморфности b-базисов и возмущение b-базисов.

В следующей теореме приводятся условия b-изоморфности к b-базису при фредгольмовом возмущении.

Теорема 0.0.15. *Пусть система* $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *образует* b*-базис в* Z, $F \in L(Z)$ *- фредгольмовый оператор, система* $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *такая, что* $F(b(x,\varphi_n)) = b(x,\psi_n)$, $\forall x \in X$, $n \in N$. *Тогда следующие свойства эквивалентны:*

a) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *-* b*-полна в* Z*;*

b) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *-* b*-минимальна в* Z*;*

c) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *-* ω*-*b*-линейно независима в* Z*;*

d) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *образует* b*-базис в* Z, b*-изоморфный к* $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.

Определение 0.0.13. *Систему* $\{y_n\}_{n\in N}$ *с* b*-биортогональной* $\{y_n^*\}_{n\in N}$ *назовем* p*-*b*-бесселевой в* Z*, если* $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n^*(z)\|_X^p\right)^{\frac{1}{p}} \le B\|z\|_Z$, $\forall z \in Z$.

Если p*-*b*-бесселевая в* Z *система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *образует* b*-базис, то систему* $\{y_n\}_{n\in N}$ *назовем* p*-*b*-базисом в* Z, $1 \le p < +\infty$.

Пусть $\sigma(Z,X)$ *- подпространство* $L(Z,X)$ *компактных операторов.*

Теорема 0.0.16. *Пусть система* $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *образует* p*-*b*-базис* $(1 < p < +\infty)$ *в* Z *с* b*-сопряженной системой* $\{\varphi_n^*\}_{n\in N} \subset \sigma(Z,X)$*, система* $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$ q*-близка к* $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$. *Тогда условия a)-d) теоремы 0.0.15 эквивалентны.*

В следующей теореме изучаются b-изоморфность близких в определенном смысле b-базисов.

Теорема 0.0.17. *Пусть система* $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *образует* b*-базис в* Z *с* b*-биортогональной системой* $\{\varphi_n^*\}_{n\in N} \subset \sigma(Z,X)$*, система* $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *такая, что* $\sum_{n=1}^{\infty}\|\psi_n - \varphi_n\|_Y \|\varphi_n^*\| < +\infty$. *Тогда условия a)-d) теоремы 0.0.15 эквивалентны.*

В параграфе 2.2 изучается устойчивость b-базисов в гильбертовых и банаховых пространствах.

Следующая теорема является обобщением базисности Рисса системы квадратично близкой к базису Рисса.

Теорема 0.0.18. *Пусть система* $\{\varphi_n\}_{n\in N}\subset Y$ *образует* $b_{l_2(X)}$*-базис Рисса в* H с b-биортогональной системой $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$: $\omega_b(\cdot,\varphi_n^*)\in\sigma(H,X)$, *система* $\{\psi_n\}_{n\in N}\subset Y$ - ω-b*-линейно независима и квадратична близка к* $\{\varphi_n\}_{n\in N}$. *Тогда* $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *образует* b*-базис в* H, b*-изомофный к* $\{\varphi_n\}_{n\in N}$, *т.е.* $b_{l_2(X)}$*-базис Рисса.*

Следующая теорема является обобщением теоремы Пэли-Винера ([8], стр. 172) в банаховых пространствах.

Теорема 0.0.19. *Пусть система* $\{\varphi_n\}_{n\in N}\subset Y$ *образует* b*-базис в* Z *и система* $\{\psi_n\}_{n\in N}\subset Y$ *такая, что* $\exists\theta\in[0,1)$, *для любой конечной последовательности* $\{x_n\}\subset X$ *верно соотношение*

$$\left\|\sum_n b(x_n,\varphi_n-\psi_n)\right\|_Z\le\theta\left\|\sum_n b(x_n,\varphi_n)\right\|_Z.$$

Тогда система $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *образует* b*-базис,* b*-изоморфный к* $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.

В параграфе 2.3 изучается бесселевый базис и его устойчивость в банаховом пространстве относительно произвольного пространства последовательностей векторов.

Пусть $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ система из Y образует b-базис в Z, с b-биортогональной системой $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}\subset L(Z,X)$ и $\hat{X}_\Phi$ - банахово пространство последовательностей из коэффициентов разложений по b-базису $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ с нормой

$$\|\hat{x}\|_{\hat{X}_\Phi}=\sup_n\left\|\sum_{k=1}^n b(x_k,\varphi_k)\right\|_Z,\ \hat{x}=\{x_n\}_{n\in N}.$$

Следующее понятие является обобщением понятия p-бесселевого базиса при билинейном отображении.

Определение 0.0.14. b*-базис* $\{\varphi_n\}_{n\in N}\subset Y$ *в* Z *с* b*-биортогональной системой* $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}\subset L(Z,X)$ *назовем* $b_{\hat{X}}$*-бесселевым базисом, если* $\exists B>0\ \forall z\in Z$ *имеет место неравенство* $\left\|\{\varphi_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}}\le B\|z\|_Z$.

Нам понадобится следующее понятие.

Определение 0.0.15. *Пусть* $\hat{X}$ *и* $\hat{Y}$ - KB*-пространства последовательностей векторов над* X *и* Y *соответственно. Будем говорить, что* $\hat{X}$ *нормально подчинена к* $\hat{Y}$*, если из* $\{x_n\} \subset X$, $\{y_n\} \subset Y$, $\|x_n\|_X \le \|y_n\|_Y$ *и* $\{y_n\} \in \hat{Y}$ *следует, что* $\{x_n\} \in \hat{X}$ *и* $\|\{x_n\}\|_{\hat{X}} \le \|\{\varphi_n\}\|_{\hat{Y}}$.

Следующая теорема является аналогом теоремы об изоморфности к p-бесселевому базису q-близкой системы (p, q - сопряженные числа).

Теорема 0.0.20. *Пусть* $\hat{X}$ *- рефлексивное* CB*-пространство такое, что* $\hat{X}^*$ *подчинена к* $\hat{Y}$*, система* $\{\varphi_n\} \subset Y$ *образует* $b_{\hat{X}}$*-бесселевый базис в* Z *и* $\{\varphi_n^*\}_{n\in N} \subset \sigma(Z, X)$. *Пусть система* $\{\psi_n\} \subset Y$ *такая, что* $\{\varphi_n - \psi_n\}_{n\in N} \in \hat{Y}$. *Тогда условия a)- d) теоремы 0.0.15 эквивалентны.*

Глава III, состоящая из семи параграфов, посвящена изучению фреймов, атомарных разложений и их возмущений в банаховых пространствах посредством билинейных отображений относительно банаховых пространств последовательностей векторов.

В параграфе 3.1 приводятся понятия b-фреймов, b-фреймового оператора в гильбертовых пространствах и изучаются некоторые их свойства.

Пусть X и H - гильбертовы пространства и $\{y_k\}_{k\in N} \subset Y$. Следующее понятие является обобщением фреймов в гильбертовых пространствах.

Определение 0.0.16. *Последовательность* $\{y_k\}_{k\in N}$ *назовем* b*-фреймом в* H*, если существуют постоянные* $A, B > 0$ *такие, что*

$$A\|h\|_H^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} \|\omega_b(h, y_k)\|_X^2 \le B\|h\|_H^2, \quad \forall h \in H. \tag{0.0.1}$$

Постоянные A и B назовем границами b-фрейма. При выполнении правой части (0.0.1) $\{y_k\}_{k\in N}$ назовем b-бесселевой в H с границей B.

В случае, когда $X = C$, $Y = H$ и $b(\lambda, y) = \lambda y$ имеем $\omega_b(h, y) = (h, y)_H$ и неравенство (0.0.1) принимает вид

$$A\|h\|_H^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} |(h, y_k)|^2 \le B\|h\|_H^2, \ \forall h \in H \ ,$$

т. е. $\{y_k\}_{k\in N}$ - фрейм в H с границами A и B.

Имеет место критерий b -фреймовости последовательности.

Теорема 0.0.21. *Последовательность $\{y_k\}_{k\in N}$ образует b-фрейм в H тогда и только тогда, когда определен ограниченный сюръективный оператор $T : l_2(X) \to Z$, заданный по формуле $T(\{x_k\}_{k\in N}) = \sum_{k=1}^{\infty} b(x_k, y_k)$.*

Пусть Y_1 - банахово пространство, H_1 - гильбертово пространство и $b_1 : X \times Y_1 \to H_1$ ограниченное билинейное отображение.

Имеет место нетерово возмущение b -фреймов.

Теорема 0.0.22. *Пусть система $\{y_n\}_{n\in N}$ является b-фреймом в H с b-фреймовыми границами A и B, $F \in L(H, H_1)$ является нетеровым оператором, система $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y_1$ такая, что $F(b(x, y_n)) = b_1(x, \psi_n)$ для всех $x \in X$, $n \in N$. Тогда $\{\psi_n\}_{n\in N}$ образует b-фрейм в $\overline{L_b(\{\psi_n\}_{n\in N})}$.*

В параграфе 3.2 изучается обобщение фреймов в банаховых пространствах посредством билинейных отображений в смысле b -базиса.

Определение 0.0.17. *Систему $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ назовем $b_{\hat{X}^*}$-фреймом в Z^*, если для любого $g \in Z^*$ последовательность $\{b^*(g, \varphi_n)\}_{n\in N} \in \hat{X}^*$ и существуют постоянные $0 < A \le B < \infty$ такие, что $A\|g\| \le \left\|\{b^*(g, \varphi_n)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}^*} \le B\|g\|$.*

Имеет место следующий критерий $b_{\hat{X}^*}$ -фреймовости систем.

Теорема 0.0.23. *Система $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ образует $b_{\hat{X}^*}$-фрейм в Z^*, тогда и только тогда, когда определен ограниченный суръективный оператор $T : \hat{X} \to Z$ по формуле $T\hat{x} = \sum_{n=1}^{\infty} b(x_n, \varphi_n)$, $\forall \hat{x} = \{x_n\}_{n\in N} \in \hat{X}$.*

Имеет место соответствующее проекционное свойство $b_{\hat{X}^*}$ -фреймов.

Теорема 0.0.24. *Пусть система $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ образует $b_{\hat{X}^*}$-фрейм в Z^*. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

1) Существует объемлющее B*-пространство* Z_1*, включающее в себя пространство* Z *в качестве замкнутого подпространства, имеющий* $t_{\hat{X}}$*-базис* $\{\psi_n^*\}_{n\in N} \subset L(X, Z_1)$*, где* $t(x,\psi^*) = \psi^*(x)$*, и* $P \in L(Z_1, Z)$ *- проектор такой, что* $P\psi_n^*(x) = b(x,\varphi_n)$*, для* $\forall x \in X$ *,* $n \in N$*;*

2) Подпространство $\hat{N} = \left\{ \hat{x} = \{x_n\}_{n\in N} \in \hat{X} : \sum_{n=1}^{\infty} b(x_n,\varphi_n) = 0 \right\}$ *дополняемо в* $\hat{X}$*;*

3) Существует $\hat{X}$*-бесселева система* $\{\varphi_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z, X)$ *такая, что для любого* $z \in Z$ *выполняется равенство* $z = \sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z),\varphi_n)$*.*

В параграфе 3.3 обобщаются некоторые свойства банаховых фреймов в банаховых пространствах на случай пространств последовательностей векторов.

Определение 0.0.18. *Систему* $\{g_k\}_{k\in N} \subset L(Z, X)$ *назовем* $\hat{X}$*-фреймом в* Z*, если существуют постоянные* $A > 0$ *и* $B > 0$*:* $A\|z\|_Z \le \left\|\{g_k(z)\}_{k\in N}\right\|_{\hat{X}} \le B\|z\|_Z$*,* $\forall z \in Z$*.*

Следующая теорема устанавливает критерий $\hat{X}$-фреймовости.

Теорема 0.0.25. *Пусть* $\hat{X}$*- рефлексивное* CB*-пространство,* Z *- рефлексивно и система* $\{g_k\}_{k\in N} \subset L(Z, X)$*. Тогда* $\{g_k\}_{k\in N}$ *образует* $\hat{X}$*-фрейм в* Z *тогда и только тогда, когда оператор* $T : \hat{X}^* \to Z^*$*, определенный по формуле (0.0.2), является линейным ограниченным сюръективным оператором.*

Следующее понятие является обобщением банаховых фреймов относительно векторнозначных последовательностей.

Определение 0.0.19. *Пусть даны система* $\{g_n\}_{n\in N} \subset L(Z, X)$ *и линейный оператор* $S : \hat{X} \to Z$*. Пара* $(\{g_n\}_{n\in N}, S)$ *называется банаховым* $\hat{X}$*-фреймом в* Z*, если выполнены условия*

1) $\{g(z)\}_{n\in N} \in \hat{X}$ *для любого* $z \in Z$*;*

2) существуют числа $A > 0, B > 0$ *:* $A\|z\|_Z \le \left\|\{g_n(z)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} \le B\|z\|_Z$*,* $\forall z \in Z$*;*

3) оператор S *ограничен на* $\hat{X}$ *и* $S(\{g_n(z)\}_{n\in N}) = z$*,* $\forall z \in Z$*.*

Справедлива

Теорема 0.0.26. *Пусть* $\{g_n\}_{n\in N} \subset L(Z,X)$ *является* $\hat{X}$*-фреймом в* Z *и оператор* $U \in L(Z,\hat{X})$, *задан по формуле* $U(z) = \{g_k(z)\}_{k\in N}$, $\forall z \in Z$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathrm{Im}U$ *дополняемо в* $\hat{X}$*;*

2) оператор $U^{-1} : \mathrm{Im}U \to Z$ *может быть продолжен до ограниченного оператора на все* $\hat{X}$*;*

3) существует ограниченный оператор $S \in L(\hat{X}, Z)$ *такой, что пара* $(\{g_n\}_{n\in N}, S)$ *образует банаховый* $\hat{X}$*-фрейм в* Z.

4) $\exists\{\Lambda_k\}_{k\in N} \subset L(X,Z)$ $\hat{X}^*$*-бесселевая в* Z^* *система:* $z = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k g_k(z)$, $\forall z \in Z$.

В параграфе 3.4 изучается связь между $\hat{X}$-фреймами и $\hat{X}$-Рисс базисами в банаховых пространствах.

Имеет место следующий критерий $\hat{X}^*$-Рисс g-базисности.

Теорема 0.0.27. *Пусть* $\hat{X}$*-рефлексивное* CB*-пространство, и* Z *-рефлексивно. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\{g_k\}_{k\in N}$ *-* $\hat{X}^*$*-Рисс* g*-базис в* Z^* *с границами* A *и* B*;*

2) $\{g_k\}_{k\in N}$ *-* $\hat{X}$*-фрейм в* Z *с границами* A, B, *и* g*-минимальна в* Z^**;*

3) $\{g_k\}_{k\in N}$ *-* g*-полна, одновременно* $\hat{X}$*-бесселева и* $\hat{X}$*-гильбертова в* Z.

В параграфе 3.5 изучается b-атомарное разложение и ее нетерово возмущение в банаховых пространствах.

Пусть даны системы $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ и $\{y_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z,X)$. Следующее понятие является обобщением понятия атомарного разложения.

Определение 0.0.20. *Пару* $(\{y_n^*\}_{n\in N}, \{y_n\}_{n\in N})$ *назовем* b*-атомарным разложением (*$b_{\hat{X}}$*-атомарным разложением) в* Z *относительно* $\hat{X}$*, если*

1) $\{y_n^*(z)\}_{n\in N} \in \hat{X}$, $\forall z \in Z$*;*

2) существуют числа $A>0, B>0$*:* $A\|z\|_Z \le \left\|\{y_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} \le B\|z\|_Z$, $\forall z \in Z$*;*

3) Для $\forall z \in Z$ *имеет место равенство* $z=\sum_{n=1}^{\infty} b(y_n^*(z), y_n)$.

Если $\{y_n\}_{n\in N}$ является $b_{\hat{X}^*}$-фреймом в Z^* и $\left(\{y_n^*\}_{n\in N}, \{y_n\}_{n\in N}\right)$ является $b_{\hat{X}}$-атомарным разложением в Z, то $\{y_n\}_{n\in N}$ будем называть альтернативным дуальным для $\{y_n^*\}_{n\in N}$.

Имеет место следующая

Теорема 0.0.28. *Пусть* $\{y_n\}_{n\in N}$ - $b_{\tilde{X}^*}$*-бесселева система в* Z^**, а* $\{y_n^*\}_{n\in N}$ - $\hat{X}$*-бесселева система в* Z *такая, что справедливо* $z=\sum_{n=1}^{\infty} b(y_n^*(z), y_n)$, $\forall z \in Z$. *Тогда* $\left(\{y_n^*\}_{n\in N}, \{y_n\}_{n\in N}\right)$ *является* $b_{\hat{X}}$*-атомарным разложением в* Z *и* $\{y_n\}_{n\in N}$ *является альтернативным дуальным* $b_{\tilde{X}^*}$*-фреймом в* Z^* *для* $\{y_n^*\}_{n\in N}$.

В следующей теореме устанавливается нетерово возмущение $b_{\hat{X}}$-атомарного разложения.

Теорема 0.0.29. *Пусть* $\left(\{y_n^*\}_{n\in N}, \{y_n\}_{n\in N}\right)$ - $b_{\tilde{X}}$*-атомарное разложение* Z *с границами* A *и* B, $F \in L(Z, Z_1)$ *нетеров оператор и* $F(b(x, y_n)) = b_1(x, \psi_n)$ *для всех* $x \in X$, $n \in N$. *Тогда существует* $\{\psi_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z_1, X)$ *такая, что* $\left(\{\psi_n^*\}_{n\in N}, \{\psi_n\}_{n\in N}\right)$ *является* $b_{\tilde{X}}$*-атомарным разложением в* $\overline{L_b(\{\psi_n\}_{n\in N})}$. *Если* $\{y_n\}_{n\in N}$ *является альтернативным дуальным* $b_{\hat{X}}^*$*-фреймом в* Z^* *для* $\{y_n^*\}_{n\in N}$, *то* $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *альтернативный дуальный* $b_{\hat{X}}^*$*-фрейм в* $Z_1^* - \ker F^*$ *для* $\{\psi_n^*\}_{n\in N}$.

В параграфе 3.6 изучается устойчивость $b_{\hat{X}}$-атомарного разложения и $\hat{X}$-фрейма в банаховых пространствах.

Пусть $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ и $\{\varphi_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z, X)$ - некоторые системы.

Справедливы следующие теоремы об устойчивости $b_{\hat{X}}$-атомарного разложения в банаховых пространствах.

Теорема 0.0.30. *Пусть* $\left(\{\varphi_n^*\}_{n\in N}, \{\varphi_n\}_{n\in N}\right)$ - $b_{\hat{X}}$*-атомарное разложение в* Z *с границами* A *и* B, *и* $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *некоторая система. Предположим, что существуют числа* $\lambda, \beta, \mu \geq 0$ *такие, что* *i)* $\max\{\beta;\lambda+\mu B\}<1$;

ii) $\left\|\sum_i b(x_i,\varphi_i-\psi_i)\right\|_Z \le \lambda\left\|\sum_i b(x_i,\varphi_i)\right\|_Z + \beta\left\|\sum_i b(x_i,\psi_i)\right\|_Z + \mu\|\{x_i\}\|_{\hat{X}}$, $\forall\{x_i\}\in\hat{X}$.

Тогда существует $\{\psi_n^*\}_{n\in N}\subset L(Z,X)$ *такая, что* $\left(\{\psi_n^*\}_{n\in N},\{\psi_n\}_{n\in N}\right)$ *является* $b_{\hat{X}}$ *-атомарным разложением в* Z *с границами*

$$\frac{(1-\beta)A}{1+(\lambda+\mu B)} \text{ и } \frac{(1+\beta)B}{1-(\lambda+\mu B)}.$$

Теорема 0.0.31. *Пусть* $\hat{X}^*$ *нормально подчинена к* $\hat{Y}$, $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}\subset\sigma(Z,X)$ *и* $\left(\{\varphi_n^*\}_{n\in N},\{\varphi_n\}_{n\in N}\right)$ *-* $b_{\hat{X}}$ *-атомарное разложение в* Z *с границами* A *и* B*, система* $\{\psi_n\}_{n\in N}\subset Y$ ω*-*b *-линейно независима относительно* $\hat{X}$ *и* $\{\varphi_n-\psi_n\}_{n\in N}\in\hat{Y}$*. Тогда существует система* $\{\psi_n^*\}_{n\in N}\subset L(Z,X)$ *такая, что* $\left(\{\psi_n^*\}_{n\in N},\{\psi_n\}_{n\in N}\right)$ *является* $b_{\hat{X}}$ *-атомарным разложением в* Z.

Справедливы аналогичные теоремы об устойчивости $\hat{X}$-фреймов и $\hat{X}$-Рисс g-базисов в банаховых пространствах.

Параграф 3.7 посвящен этим результатам.

Глава IV посвящена получению аналогов теорем Рисса и Пэли относительно коэффициентов Фурье по ортогональной равномерно ограниченной системе в пространствах Лебега со смешанной нормой и в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости, а также установлению существования обобщенного решения смешанной задачи для одного класса уравнений третьего порядка в пространстве $B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}$ (q,p - сопряженные числа), $p\ge 2$.

В параграфе 4.1 доказываются аналоги теорем Рисса и Пэли в пространствах Лебега со смешанной нормой. Пусть $L_{(p,q)}((a,b)\times(c,d))$, $1<p<+\infty$, - банахово пространство измеримых на $(a,b)\times(c,d)$ функций $f(x,y)$, для которых конечна смешанная норма

$$\|f\|_{L_{(p,q)}}=\left(\int_a^b\left(\int_c^d|f(x,y)|^q dy\right)^{\frac{p}{q}}dx\right)^{\frac{1}{p}},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Обозначим через $l_p(a,b)$, $1<p<+\infty$, - банахово пространство последовательностей $a(t)=\{a_i(t)\}_{i\in N}$ измеримых на (a,b) функций, для которых конечна норма

$$\|a\|_{l_p(a,b)}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\int_a^b|a_i(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $\{\varphi_n(t)\}_{n\in N}$ - ортогональная система на $[a,b]$ такая, что почти всюду на $[a,b]$ $|\varphi_n(t)|\le M$ $(n\in N)$, M не зависит от n.

Следующая теорема является аналогом теоремы Рисса в $l_p(a,b)$.

Теорема 0.0.32. *Верны следующие утверждения:*

1) если $f\in L_{(q,p)}((a,b)\times(c,d))$, $1<p\le 2$ *(*q,p *- сопряженные числа), то* $a(t)=\{a_i(t)\}_{i\in N}\in l_q(a,b)$, $a_i(t)=\int_c^d f(t,s)\varphi_i(s)ds$, *причем* $\|a\|_{l_q(a,b)}\le M^{\frac{2-p}{p}}\|f\|_{L_{(q,p)}}$*;*

2) если $a(t)=\{a_i(t)\}_{i\in N}\in l_p(a,b)$, $1<p\le 2$, *то существует* $f\in L_{(p,q)}((a,b)\times(c,d))$ *(*q,p *- сопряженные числа), что* $a_i(t)=\int_c^d f(t,s)\varphi_i(s)ds$, *причем* $\|f\|_{L_{(p,q)}}\le M^{\frac{2-p}{p}}\|a\|_{l_p(a,b)}$.

В параграфе 4.2 доказываются аналоги теорем Рисса и Пэли в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости. Пусть Ω - измеримое множество из R^n и $p(x)$ - измеримая на Ω функция такая, что $p(x)\ge 1$. Для множества $E\subset\Omega$ обозначим

$$p_+(E)=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E}p(x) \text{ и } p_-(E)=\operatorname*{ess\,inf}_{x\in E}p(x),$$

в частности, положим $p_+=p_+(\Omega)$, $p_-=p_-(\Omega)$. Пусть $\Omega_\infty=\{x\in\Omega: p(x)=\infty\}$.

Определение 0.0.21. *Модуляром измеримой функции* $f:\Omega\to R$ *относительно* $p(\cdot)$ *называется число* $\rho_{p(\cdot),\Omega}(f)=\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\infty}|f(x)|^{p(x)}dx+\|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)}$.

Через $L_{p(x)}(\Omega)$ обозначается множество измеримых функций $f:\Omega\to R$ таких, что $\rho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda)<+\infty$ для некоторого $\lambda>0$. $L_{p(x)}(\Omega)$ становится банаховым пространством по норме $\|f\|_{L_{p(x)}(\Omega)}=\inf\{\lambda>0:\rho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda)\le 1\}$.

Пусть $q(x)$, $q(x)\ge 1$, - измеримая на Ω функция и T - измеримое множество из R^n. Через $L_{q(\cdot)}(\Omega,L_{p(\cdot)}(T))$ обозначается пространство измеримых на $\Omega\times T$ функций $f(x,t):\Omega\times T\to R$ таких, что для почти всех $x\in\Omega$ $f(x,\cdot)\in L_{p(x)}(T)$ и $\|f(x,\cdot)\|_{L_{p(x)}(T)}\in L_{q(x)}(\Omega)$, а через $l_{p(x)}(\Omega)$ множество последовательностей $\{c_k(x)\}_{k\in N}$ измеримых на Ω функций, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\Omega}|c_k(x)|^{p(x)}dx<+\infty$. Пусть $l_{p(x),p(x)-2}(\Omega)$ - множество последовательностей $\{c_k(x)\}_{k\in N}$ измеримых на Ω функций таких, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\Omega}k^{p(x)-2}|c_k(x)|^{p(x)}dx<+\infty$. Для $\{c_k(x)\}_{k\in N}$ положим

$$\|\{c_k\}\|_{l_{p(x)}(\Omega)}=\inf\left\{\lambda>0:\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Omega}\left(\frac{|c_k(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}\le 1\right\},$$

$$\|\{c_k\}\|_{l_{p(x),p(x)-2}(\Omega)}=\inf\left\{\lambda>0:\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Omega}k^{p(x)-2}\left(\frac{|c_k(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}\le 1\right\}.$$

В следующей теореме приводится аналог Теоремы Рисса в пространствах $L_{q(x)}(\Omega,L_{p(x)}(T))$.

Теорема 0.0.33. *Верны следующие утверждения:*

1) Если $f\in L_{q(x)}((a,b),L_{p(x)}(c,d))$, $1<p_-\le p(x)\le 2$, *то* $\{c_k\}_{k\in N}\in l_{q(x)}(a,b)$, $c_k(x)=\int\limits_c^d f(x,t)\varphi_k(t)dt$, $k\in N$, $q(x)=\dfrac{p(x)}{p(x)-1}$, *и* $\|\{c_k\}_{k\in N}\|_{l_{q(x)}(a;b)}\le M_1(p)\|f\|_{L_{q(x)}((a,b),L_{p(x)}(c,d))}$.

2) Для любой последовательности $\{c_k\}_{k\in N} \in l_{p(x)}(a,b)$, $1 < p(x) \le 2$, *существует функция* $f \in L_{p(x)}((a,b), L_{q(x)}(c,d))$, $q(x) = \dfrac{p(x)}{p(x)-1}$, *для которой* $c_k(x) = \int\limits_c^d f(x,t)\varphi_k(t)dt$, $k \in N$, *и такая, что* $\|f\|_{L_{p(x)}((a,b),L_{q(x)}(c,d))} \le M_1(p)\left\|\{c_k\}_{k\in N}\right\|_{l_{p(x)}(a,b)}$,

где $M_1(p) = \max\left\{M^{\frac{2}{p_-}-1}, M^{\frac{2}{p_+}-1}\right\}$.

В параграфе 4.3 доказывается существование обобщенного решения смешанной задачи для одного класса дифференциального уравнения третьего порядка. Пусть T - некоторое положительное число. Обозначим через $L_p([0,T], L_{p,p-2}(0,\pi))$, $p \ge 2$, - банахово пространство функций $f(t,x) \in L_p(D)$, $D = (0,T)\times(0,\pi)$, с конечной нормой

$$\|f\|_{L_p([0,T],L_{p,p-2}(0,\pi))} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}\int_0^T |f_n(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $f_n(t) = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(t,x)\sin nx dx$.

Пусть X - некоторое банахово пространство. Через $W_p^{(1)}((a,b),X)$ обозначается пространство вектор функций $u:[a,b]\to X$ таких, что для $\forall t \in [0,T]$ существует в X сильный предел $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t} = u'(t)$ и имеет место

$$\|u\|^p_{W_p^{(1)}((a,b),X)} = \int_a^b \|u(t)\|_X^p\, dt + \int_a^b \|u'(t)\|_X^p\, dt < +\infty.$$

Пусть $B^{\alpha_0,\alpha_1,..\alpha_k}_{\beta_0,\beta_1,..,\beta_k,T}$ - банахово пространство функций $u(t,x)$ вида $u(t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx$, рассматриваемых на прямоугольнике D, для которых $u_n(t) \in C^{(k)}([0,T])$, с конечной нормой

$$\|u\|_{B^{\alpha_0,\alpha_1,..\alpha_k}_{\beta_0,\beta_1,..,\beta_k T}} = \sum_{i=0}^{k}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\max_{0\le t\le T}\left|u_n^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right)^{\frac{1}{\beta_i}},$$

где $\alpha_i \ge 0$, $\beta_i \ge 1$, $i = \overline{0,k}$, $k \ge 0$ - целое число.

Рассмотрим следующую смешанную задачу для уравнения

$$u_{tt}(t,x) - \alpha u_{txx}(t,x) = F(u)(t,x) \qquad (0.0.2)$$

с начальными и граничными условиями

$$u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x),\ 0 \le x \le \pi, \qquad (0.0.3)$$

$$u(t,\pi) = u(t,0) = 0,\ 0 \le t \le T, \qquad (0.0.4)$$

где $0 < \alpha$ - фиксированное число, F - заданный, вообще говоря, нелинейный оператор, φ и ψ - заданные функции.

Определение 0.0.22. *Функция* $u(t,x) \in B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}$ *(q, p-сопряженные числа), удовлетворяющая условию (0.0.3) называется обобщенным решением задачи (0.0.2)-(0.0.4), если для любой функции* $v(t,x) \in W_1^1([0,T], L_q(0,\pi))$ *такой, что* $v(T,x) = 0$ *для п.в. на* $[0,\pi]$, $v(t,0) = v(t,\pi) = 0$, $t \in [0,\pi]$, *выполняется тождество*

$$\int_0^T \int_0^\pi \{u_t(t,x)v_t(t,x) - \alpha u_{xx}(t,x)v_t(t,x) + F(u)(t,x)v(t,x)\} dxdt -$$

$$-\alpha \int_0^\pi \varphi^{//}(x)v(0,x)dx + \int_0^\pi \psi(x)v(0,x)dx = 0.$$

Справедлива следующая

Теорема 0.0.34. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\varphi(x) \in C^{(1)}([0,\pi]) \cap W_p^2(0,\pi)$, $\{n^2\varphi_n\}_{n\in N} \in l_{p,p-2}$, $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$;

2) $\psi(x) \in C([0,\pi]) \cap W_p^1(0,\pi)$, $\{n\psi_n\}_{n\in N} \in l_{p,p-2}$, $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$;

3) $F(u) \in L_p([0,T], L_{p,p-2}(0,\pi))$, $u \in B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}$, $p \ge 2$, *существуют* $a(t), b(t) \in L_p(0,T)$ *такие, что* $\|F(u)(t,\cdot)\|_{L_{p,p-2}(0,\pi)} \le a(t) + b(t)\|u\|_{B_{p,p,t}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}}$, $t \in [0,T]$;

4) существует функция $c(t) \in L_p(0,T)$ *такая, что* $\forall u, v \in S(0,R)$

$$\|F(u)(t,\cdot) - F(v)(t,\cdot)\|_{L_{p,p-2}(0,\pi)} \le c(t)\|u - v\|_{B_{p,p,t}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}},\ t \in [0,T],$$

где $R^p = A\exp\int_0^T B^p(t)dt$, $B(t) = L_0 b(t)$, $A = 2^{p-1}\|w\|^p_{B_{p,p,t}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}} + L_0^p\|a\|^p_{L_p(0,T)}$, $L_0 = 2^{\frac{2}{q}}\left(\alpha^{-1}T^{\frac{1}{q}} + \alpha^{-\frac{1}{q}}q^{-\frac{1}{q}}\right)$,

$w_n(t) = \varphi_n + \frac{1}{\alpha n^2}\left(1 - e^{-\alpha n^2 t}\right)\psi_n$.

Тогда задача (0.0.2) -(0.0.4) имеет единственное обобщенное решение.

Замечание 0.0.1. Отметим, что несмотря на то, что всякое обобщенное решение задачи (0.0.2)-(0.0.4) в пространстве $B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}$ является ее обобщенным решением в пространстве $B_{2,2,T}^{2,1}$, из условий Теоремы 0.0.34 вообще говоря не следуют условия существования и единственности обобщенного решения задачи (0.0.2)-(0.0.4) в случае $p=2$.

Глава V посвящена вопросам базисности классической системы экспонент, а также системы из собственных функций разрывной спектральной задачи для некоторого дифференциального уравнения второго порядка в пространствах гранд Лебега и в весовых пространствах гранд Лебега с весом общего вида.

В параграфе 5.1 доказывается плотность множества непрерывных функций в подпространстве гранд Лебега, порожденное оператором сдвига и устанавливается ограниченность сингулярного оператора в этом подпространстве. Рассмотрим в $L_{p)}(a,b)$ оператор сдвига

$$T_\delta f(x)=\begin{cases} f(x+\delta), x+\delta\in[a,b], \\ 0, x+\delta\in R\setminus[a,b], \end{cases},\ \delta>0.$$

Обозначим через $\widetilde{G}_{p)}(a,b)$ - линейное многообразие, состоящее из функций $f\in L_{p)}(a,b)$ удовлетворяющих условию $\|T_\delta f-f\|_{p)}\to 0$, $\delta\to 0$. Пусть $G_{p)}(a,b)$ замыкание $\widetilde{G}_{p)}(a,b)$ в $L_{p)}(a,b)$.

Теорема 0.0.35. *Множество* $C_0^\infty[a,b]$ *плотно в* $G_{p)}(a,b)$.

В параграфе 5.2 доказывается базисность системы экспонент и тригонометрических систем синусов и косинусов в подпространстве гранд Лебега, порожденное оператором сдвига.

Доказана базисность системы экспонент $\{e^{int}\}_{n\in Z}$ и тригонометрических систем синусов $\{\sin nt\}_{n\in N}$ и косинусов $\{\cos nt\}_{n\in N_0}$ в подпространстве $G_{p)}(-\pi,\pi)$.

Теорема 0.0.36. *Система экспонент* $\{e^{int}\}_{n\in Z}$ *образует базис в пространстве* $G_{p)}(-\pi,\pi)$, $1<p<+\infty$.

Также справедлива

Теорема 0.0.37. *Системы синусов* $\{\sin nt\}_{n\in N}$ *и косинусов* $\{\cos nt\}_{n\in N_0}$ *образуют базисы в пространстве* $G_{p)}(0,\pi)$, $1<p<+\infty$.

В параграфе 5.3 изучается базисность системы экспонент и тригонометрических систем синусов и косинусов в весовых пространствах гранд Лебега с весом общего вида.

Пусть $\rho:[a,b]\to R_+$ - некоторая весовая функция. Через $A_p(a,b)$, $1<p<+\infty$, обозначается класс Макенхоупта, т. е. класс весовых функций $\rho(t)$ удовлетворяющих условию

$$\sup_{I\subset[a,b]}\frac{1}{|I|}\int_I\rho(t)dt\left(\frac{1}{|I|}\int_I\rho(t)^{-\frac{1}{p-1}}dt\right)^{p-1}<+\infty .$$

Пусть $L_{p),\rho}(a,b)$ весовое пространство гранд Лебега измеримых на $[a,b]$ функций f с конечной нормой $\|f\|_{L_{p),\rho}(a,b)}=\|f\rho\|_{L_{p)}(a,b)}$.

Обозначим через $G_{p),\rho}(a,b)$ подпространство пространства $L_{p),\rho}(a,b)$ функций f таких, что $\rho f\in G_{p)}(a,b)$.

В следующей теореме устанавливается базисность классической системы экспонент в пространствах $G_{p),\rho}(-1,1)$.

Теорема 0.0.38. *Пусть весовая функция* ρ *принадлежит классу Макенхоупта* $A_p(-1,1)$. *Тогда система экспонент* $\{e^{in\pi x}\}_{n\in Z}$ *образует базис в пространстве* $G_{p),\rho}(-1,1)$.

Также справедлива

Теорема 0.0.39. *Пусть весовая функция* ρ *принадлежит классу* $A_p(0,1)$. *Тогда система синусов* $\{\sin\pi nx\}_{n\in N}$ *и косинусов* $\{\cos\pi nx\}_{n\in Z_+}$ *образуют базис в пространстве* $G_{p),\rho}(0,1)$, $1<p<+\infty$.

В параграфе 5.4 изучается базисность собственных функций одной разрывной спектральной задачи для дифференциального уравнения второго порядка в пространстве гранд Лебега.

Рассмотрим следующую разрывную спектральную задачу вида

$$y^{//}(x)+\lambda y(x)=0\,,\ x\in(-1{,}0)\cup(0{,}1)\,, \tag{0.0.5}$$

$$\left.\begin{aligned} &y(-1)=y(1)=0,\\ &y(-0)=y(+0),\\ &y^{/}(-0)-y^{/}(+0)=\lambda m y(0), m\neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{0.0.6}$$

Определим в $G_{p)}(-1{,}1)\oplus C$ соответствующий задаче (0.0.5), (0.0.6) линеаризующий оператор L по формуле $L(\hat{u})=(-u^{//},u^{/}(-0)-u^{/}(+0))$ с областью определения

$$D(L)=\left\{\hat{u}=(u,mu(0)):u\in GW^2_{p)}((-1{,}0)\cup(0{,}1)),u(-1)=u(1)=0,u(-0)=u(+0)\right\}.$$

Справедлива следующая

Теорема 0.0.40. *Система собственных векторов* $\{\hat{u}_n\}_{n\in Z_+}$ *оператора* L *образует базис в пространстве* $G_{p)}(-1{,}1)\oplus C$, $1<p<+\infty$.

В параграфе 5.5 устанавливается базисность системы собственных функций дифференциального оператора одной разрывной спектральной задачи в весовом пространстве гранд Лебега с весом общего вида.

Рассмотрим в весовых пространствах гранд Лебега $L_{p),\rho}(0{,}1)$, $1<p<+\infty$, с общим весом $\rho(\cdot)$, следующую разрывную спектральную задачу вида

$$y^{//}(x)+\lambda y(x)=0\,,\ x\in(0,\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3},1)\,, \tag{0.0.7}$$

$$\left.\begin{aligned} &y(0)=y(1)=0, y(\frac{1}{3}-0)=y(\frac{1}{3}+0),\\ &y^{/}(\frac{1}{3}-0)-y^{/}(\frac{1}{3}+0)=\lambda m y(\frac{1}{3}), \end{aligned}\right\} \tag{0.0.8}$$

где λ - спектральный параметр, m - ненулевое комплексное число.

Определим в пространстве $G_{p)}(0{,}1)\oplus C$ соответствующий задаче (0.0.7), (0.0.8) линеаризующий оператор L по формуле

$$L(\hat{y})=(-y^{//};y^{/}(\frac{1}{3}-0)-y^{/}(\frac{1}{3}+0))\,,$$

область определения $D(L)$, которого состоит из

$$\hat{y}=\left(y;my(\frac{1}{3})\right)\in GW^2_{p)}((0,\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3},1))\oplus C$$

удовлетворяющее условиям $y(0)=y(1)=0$, $y(\frac{1}{3}-0)=y(\frac{1}{3}+0)$.

Имеет место следующая

Теорема 0.0.41. *Пусть весовая функция* ρ *принадлежит классу* $A_p(0,1)$. *Тогда система* $\{\hat{y}_n\}_{n\in Z_+}$ *из собственных функций оператора* L *образует базис в пространстве* $G_{p),\rho}(0,1)\oplus C$, $1<p<+\infty$.

Также установлена следующая

Теорема 0.0.42. *Пусть весовая функция* ρ *принадлежит классу* $A_p(0,1)$, $1<p<+\infty$. *Справедливы следующие утверждения:*

1) если из системы $\{y_0\}\cup\{y_{i,n}\}_{i=1,2;n\in N}$ *исключить произвольную функцию* $y_{2,n_0}(x)$, *соответствующее простому собственному значению, то полученная система образует базис в пространстве* $G_{p),\rho}(0,1)$;

2) если из системы $\{y_0\}\cup\{y_{i,n}\}_{i=1,2;n\in N}$ *исключить произвольную функцию* $y_{1,n_0}(x)$, *то полученная система не является базисом в* $G_{p),\rho}(0,1)$. *При этом эта система не полна и не минимальна в* $G_{p),\rho}(0,1)$.

В параграфе 5.6 получены аналоги теорем Коровкина и их статистические варианты в пространствах гранд Лебега.

Глава VI, состоящая из четырех параграфов, посвящена классам гранд Харди, разрешимости задач Римана в классах гранд Харди, и базисности возмущенной системы экспонент в пространствах гранд Лебега.

В параграфе 6.1 определяется класс гранд Харди, доказываются аналоги теорем Рисса, Смирнова и теорема о представлении функции по формуле Коши в этих классах.

Пусть $\gamma=\{z\in C:|z|=1\}$ - единичная окружность и $\omega=\operatorname{int}\gamma$. Определим пространство гранд Харди $H^+_{p)}$, $p>1$, аналитических в ω функций f, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{H^+_{p)}}=\sup_{0<r<1}\|f_r(\cdot)\|_{p)}<+\infty,\ f_r(t)=f(re^{it}).$$

Следующая теорема показывает, что норму в классе гранд Харди можно определить через норму граничной функции.

Теорема 0.0.43. *Всякая функция* $f \in H_{p)}^{+}$, $p>1$, *имеет почти всюду на* γ *граничные значения* $f^{+}(\cdot)$ *по некасательным путям,* $f^{+} \in L_{p)}(0,2\pi)$ *и имеет место* $\left\| f^{+}(\cdot)\right\|_{p)} = \lim\limits_{r\to 1}\left\| f_r(\cdot)\right\|_{p)}$.

Вторая часть теоремы Рисса имеет место при дополнительном условии.

Теорема 0.0.44. *Пусть* $f \in H_{p)}^{+}$, $p>1$. *Тогда соотношение* $\lim\limits_{r\to 1}\left\| f_r(\cdot) - f^{+}(\cdot)\right\|_{p)} = 0$ *выполняется в том и только в том случае, когда имеет место* $\lim\limits_{\varepsilon\to +0} \varepsilon \int\limits_{0}^{2\pi} \left| f^{+}(t)\right|^{p-\varepsilon} dt = 0$.

В следующей теореме устанавливается формула Коши для функций класса гранд Харди.

Теорема 0.0.45. *1) Если* $f \in H_{p)}^{+}$, $1 < p < +\infty$, *то имеет место формула Коши*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f^{+}(\xi)}{\xi - z} d\xi, \; z \in \omega. \tag{0.0.9}$$

2) Если $f^{+} \in L_{p)}(0,2\pi)$, $1 < p < +\infty$, *то функция* f, *определенная по формуле (0.0.9), принадлежит классу* $H_{p)}^{+}$.

В параграфе 6.2 находится общее решение однородной задачи Римана в классах гранд Харди.

Пусть функция $f(z)$ аналитична вне единичного круга ω и имеет конечный порядок на бесконечно удаленной точке, т. е. Лорановское разложение $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{m} a_k z^k, \; z \to \infty.$$

Если правильная часть $f_0(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{-1} a_k z^k$ такая, что $\overline{f_0\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} \in H_{p)}^{+}$, $p > 1$, то будем говорить, что f принадлежит классу ${}_m H_{p)}^{-}$, $p > 1$.

Рассмотрим следующую однородную задачу Римана в классах $H^{+}_{p)} \times_m H^{-}_{p)}$:

$$F^{+}(\tau) - G(\tau)F^{-}(\tau) = 0, \ \tau \in \gamma, \qquad (0.0.10)$$

где $G(\tau)$ - заданная на γ измеримая функция. Под решением задачи понимается любая пара функций $F^{+}(z)$ и $F^{-}(z)$ принадлежащих классам $H^{+}_{p)}$ и ${}_m H^{-}_{p)}$ соответственно, граничные значения $F^{\pm}(\tau)$, которых почти всюду на окружности γ удовлетворяют равенству (0.0.10).

Пусть $\theta(t) = \arg G(e^{it})$, $t \in [-\pi; \pi]$, и $Z_\theta(z)$ - каноническое решение однородной задачи (0.0.10).

Относительно общего решения задачи Римана (0.0.10) справедлива

Теорема 0.0.46. *Пусть коэффициент* G *задачи Римана (0.0.10) удовлетворяет условиям:*

i) $G^{\pm 1}(e^{it}) \in L_\infty(-\pi, \pi)$;

ii) $\theta(t)$ *- кусочно гельдерова на отрезке* $[-\pi, \pi]$, $\theta(t) = \theta_0(t) + \theta_1(t)$, *где* $\theta_0(t)$ *- непрерывная часть* $\theta(t)$, $\theta_1(t)$ *- функция скачков* $\theta(t)$ *в точках разрыва* $-\pi < s_1 < s_2 < \ldots\ldots < s_r < \pi$, *т. е.*

$$\theta_1(-\pi) = 0, \ \theta_1(t) = \sum_{k: t < s_k} h_k, \ t \in (-\pi, \pi],$$

где $h_k = \theta(s_k + 0) - \theta(s_k - 0)$, $k = \overline{1, r}$.

iii) последовательность $\{h_k\}_0^r$, $h_0 = \theta(-\pi) - \theta(\pi)$ *удовлетворяет условию:*

$$-\frac{1}{q} < \frac{h_k}{2\pi} \le \frac{1}{p}, \ k = \overline{0, r}.$$

Тогда о разрешимости задачи (0.0.10) в классах $H^{+}_{p)} \times_m H^{-}_{p)}$, $p > 1$, *справедлива:*

α) *при* $m \ge 0$ *задача (0.0.10) имеет общее решение вида* $F(z) = Z_\theta(z) P_k(z)$, *где* $P_k(z)$ *- произвольный многочлен степени* $k \le m$;

β) *при* $m < 0$ *задача (0.0.10) имеет тривиальное решение* $F(z) = 0$.

В параграфе 6.3 находится общее решение неоднородной задачи Римана в классах гранд Харди.

Рассмотрим следующую неоднородную задачу Римана в классах $H^+_{p)} \times_m H^-_{p)}$:

$$F^+(\tau) - G(\tau)F^-(\tau) = f(\tau), \ \tau \in \gamma, \qquad (0.0.11)$$

где $f \in L_{p)}(\gamma)$, $p > 1$, $G^{\pm 1}(\tau) \in L_\infty(\gamma)$ - заданные функции. Под решением задачи понимается любая пара функций $F^+(z)$ и $F^-(z)$ принадлежащих классам $H^+_{p)}$ и ${}_m H^-_{p)}$ соответственно, граничные значения $F^\pm(\tau)$, которых почти всюду на окружности γ удовлетворяют равенству (0.0.11).

Основным результатом параграфа является

Теорема 0.0.47. *Пусть выполнены условия теоремы 0.0.46,* $\frac{h_k}{2\pi} \neq \frac{1}{p}$, $k = \overline{0, r}$. *Тогда о разрешимости задачи (0.0.11) в классе* $H^+_{p)} \times_m H^-_{p)}$, $p > 1$, *имеет место:*

α) *при* $m \geq -1$ *задача (0.0.11) имеет общее решение вида* $F(z) = Z_\theta(z) P_k(z) + F_1(z)$, *где* $P_k(z)$ - *многочлен степени* $k \leq m$ *(при* $m = -1$, $P_k(z) = 0$*) и* $F_1(z)$ - *функция, определенная по формуле*

$$F_1(z) = \frac{Z_\theta(z)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)[Z^+_\theta(\xi)]^{-1}}{\xi - z} d\xi \ ;$$

β) *при* $m < -1$ *задача (0.0.11) разрешима тогда и только тогда, когда правая часть* $f(\tau) \in L_{p)}(-\pi, \pi)$, $p > 1$, *удовлетворяет условию ортогональности*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{it})}{Z^+(e^{it})} e^{ikt} dt = 0, \ k = \overline{1, -m-1},$$

при этом задача (0.0.11) имеет единственное решение $F(z) = F_1(z)$.

В параграфе 6.4 доказывается ограниченность сингулярного оператора в весовом подпространстве $G_{p),\rho}(-\pi, \pi)$ и базисность возмущенной системы экспонент в $G_{p)}(-\pi, \pi)$.

Пусть $\rho : [-\pi, \pi] \to R_+$ - некоторая весовая функция и T - оператор отождествления, определенный по формуле $Tf(t) = f(e^{it})$, $t \in [-\pi, \pi]$. Пусть

$G_{p),\rho}(\gamma)$ образ $G_{p),\rho}(-\pi,\pi)$ при отображении T^{-1}. В следующей Лемме доказывается инвариантность $G_{p),\rho}(\gamma)$ относительно сингулярного оператора

$$S_\gamma(f)(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi-t}d\xi .$$

Имеет место следующая

Лемма 0.0.2. *Пусть функция* ρ *принадлежит классу Макенхоупта* $A_p(-\pi,\pi)$. *Тогда оператор* S_γ *ограниченно действует в* $G_{p),\rho}(\gamma)$, $p>1$.

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема о базисности системы $E_\beta=\{e^{i(n-\beta signn)t}\}_{n\in Z}$ в пространстве $G_{p)}(-\pi,\pi)$.

Теорема 0.0.48. *Пусть* $2\operatorname{Re}\beta+\dfrac{1}{p}\notin Z$, $1<p<+\infty$. *Тогда система* E_β *образует базис в* $G^{p)}(-\pi,\pi)$, *тогда и только тогда, когда* $\left[2\operatorname{Re}\beta+\dfrac{1}{p}\right]=0$ *(*$[\alpha]$ *- целая часть* $\alpha\in R$*).*

Дефект E_β *равен* $d(E_\beta)=\left[2\operatorname{Re}\beta+\dfrac{1}{p}\right]$, *а именно: при* $d(E_\beta)<0$ *система* E_β *не полна, но минимальна в* $G_{p)}(-\pi,\pi)$; *при* $d(E_\beta)>0$ *система* E_β *полна, но не минимальна в* $G_{p)}(-\pi,\pi)$.

В заключении автор выражает глубокую и искрению благодарность научному консультанту чл.-корр. НАНА, д.ф.-м.н., проф. Билал Тельман оглы Билалову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

ГЛАВА I.

b-БЕССЕЛЕВЫ И b-ГИЛЬБЕРТОВЫ СИСТЕМЫ

Понятия бесселевых и гильбертовых систем для пары биортогональных систем в пространстве L_2 были введены Н.К.Бари [5] в 1951 г. В [5] доказаны критерии бесселевости и гильбертовости систем, базисов Рисса и изучены связи между ними. В дальнейшем понятия бесселевых систем, гильбертовых систем и базиса Рисса были обобщены в различных направлениях на банаховы пространства в работах Б.Е.Вейца [17], З.А.Чантурия [104], I.Singer [216], Б.Т.Билалова и З.Г.Гусейнова [14] и П.А.Терехина [69]. Следует отметить, что в работах [14] и [69] в качестве пространства l_2 рассматривается некоторое банахово пространство K числовых последовательностей, в котором система канонических ортов образует базис. В работе [14] для пары биортогональных систем в банаховых пространствах введены понятия K-бесселевых систем, K-гильбертовых систем и K-базиса, которые обобщают соответствующие классические понятия, относительно которых получены все соответствующие результаты Н.К.Бари. В работе [69] введено понятие бесселевых последовательностей в банаховых пространствах относительно K и обобщены критерий бесселевости Н.К.Бари и теорема Шура. Бесселевы системы и базисы Рисса в банаховых пространствах также изучались в работах O.Christensen [109], P.G.Casazza, O.Christensen и D.T. Stoeva [111].

В данной главе введены понятия b-бесселевых, b-гильбертовых последовательностей и b-базиса Рисса в гильбертовых и банаховых пространствах относительно банахова пространства последовательностей векторов и установлены их характеризации. Эти же понятия введены для системы линейных ограниченных операторов, не используя понятия минимальности и аналоги классических результатов получены в этом случае. Также изучены несчетные бесселевы, гильбертовы системы и безусловные базисы в несепарабельных банаховых пространствах относительно банахова пространства систем скаляров.

1.1. Некоторые понятия и вспомогательные факты

Сначала приведем некоторые стандартные обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем изложении. Пусть X и Y - банаховы пространства, X^* - сопряженное пространство к пространству X, $L(X,Y)$ - пространство всех линейных ограниченных операторов действующих из X в Y, $\sigma(X,Y)$ - пространство вполне непрерывных операторов, $KerT$ и $\operatorname{Im}T$ ядро и образ оператора $T: X \to Y$, T^* - сопряженный оператор к оператору $T \in L(X,Y)$, I - тождественный оператор, $(\cdot,\cdot)_H$ - скалярное произведение в гильбертовом пространстве H, $\overline{A}$ - замыкание множества $A \subset X$, $L(A)$ - линейная оболочка множества $A \subset X$, δ_{nk} - символ Кронекера, $\{\delta_n\}_{n\in N}$ - каноническая система, т. е. $\delta_n = \{\delta_{nk}\}_{k\in N}$, N, Z, Z_+, R, C - множество натуральных, целых, целых неотрицательных, действительных, комплексных чисел соответственно.

Пусть X, Y и Z - банаховы пространства. Рассмотрим билинейное отображение $b(x,y): X \times Y \to Z$, удовлетворяющее условию

$$\exists M, m > 0:\ m\|x\|_X \|y\|_Y \le \|b(x,y)\|_Z \le M\|x\|_X \|y\|_Y,\ \forall x \in X,\ y \in Y. \tag{1.1.1}$$

Пусть $Y_0 \subset Y$ некоторое множество. Обозначим через $L_b(Y_0)$ совокупность всевозможных конечных сумм вида $\sum_n b(x_n, y_n)$, где $x_n \in X$, $y_n \in Y_0$.

Определение 1.1.1 ([8]). *Система $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ называется b-полной в Z, если $\overline{L_b(\{y_n\}_{n\in N})} = Z$. Система $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ называется b-минимальной в Z, если $\forall x \in X$ $(x \neq 0)$, $k \in N$ выполняется условие $b(x, y_k) \notin \overline{L_b(\{y_n\}_{n\in N, n\neq k})}$. Системы $\{y_n\}_{n\in N}$ $\subset Y$ и $\{y_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z,X)$ называются b- биортогональными, если $\forall k,n \in N$, $x \in X$ имеет место $y_n^*(b(x,y_k)) = \delta_{nk}x$, при этом $\{y_n^*\}_{n\in N}$ называется b-биортогональной системой к $\{y_n\}_{n\in N}$.*

Система $\{\varphi_n\}_{n\in N}\subset Y$ *называется* ω-b*-линейно независимой в* Z*, если из* $\sum_{n=1}^{\infty} b(x_n,\varphi_n)=0$ *следует, что* $x_n=0$, $\forall n\in N$.

Система $\{\varphi_n\}_{n\in N}\subset Y$ *называется* b*-базисом в* Z*, если для* $\forall z\in Z$ *существует единственная последовательность* $\{x_n\}_{n\in N}\subset X$*, такая, что* $z=\sum_{n=1}^{\infty} b(x_n,\varphi_n)$.

Справедлив критерий b*-базизности систем.*

Теорема 1.1.1 ([8]). *Система* $\{\varphi_n\}_{n\in N}\subset Y$ *является* b*-базисом в* Z *тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

1) $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ - b*-полна в* Z*;*

2) $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ *имеет* b*-биортогональную систему* $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$*;*

3) система проекторов $P_n(z)=\sum_{k=1}^{n} b(\varphi_k^*(z),\varphi_k))$ *равномерно ограничена, т. е.* $\exists M>0$: $\|P_n(z)\|\le M\|z\|$, $\forall n\in N$.

Пусть $\hat{X}$ - некоторое банахово пространство последовательностей $\hat{x}=\{x_n\}_{n\in N}$, $x_n\in X$, с покоординатными линейными операциями. Пространство $\hat{X}$ назовем KB-пространством, если линейные операторы $\hat{e}_n: X\to\hat{X}$, $\hat{e}_n(x)=\{\delta_{in}x\}_{i\in N}$, $e_n:\hat{X}\to\hat{X}$, $e_n(\hat{x})=\{\delta_{in}x_n\}_{i\in N}$, $\hat{\delta}_n:\hat{X}\to X$, $\hat{\delta}_n(\hat{x})=x_n$, $\hat{x}=\{x_n\}_{n\in N}\in\hat{X}$, $x\in X$, ограничены. KB-пространство $\hat{X}$ назовем CB-пространством, если подпространства $E_k=\{\hat{x}\in\hat{X}: x_n=0, n\ne k\}$ образуют базис в $\hat{X}$, т. е. для $\forall\hat{x}=\{x_n\}_{n\in N}$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\hat{x}-\sum_{k=1}^{n}\{\delta_{ik}x_k\}_{i\in N}\right\|_{\hat{X}}=0.$$

Справедлива следующая

Лемма 1.1.1. *Пространство* $\hat{X}^*$ *сопряженное к* CB*-пространству* $\hat{X}$ *изометрически изоморфно банаховому пространству* $\hat{Y}$ *последовательностей* $\{x_n^*\}_{n\in N} \subset X^*$*, с конечной нормой*

$$\left\|\{x_n^*\}_{n\in N}\right\|_{\hat{Y}} = \sup_{\|\hat{x}\|=1}\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n)\right|.$$

Доказательство. Возьмем произвольный $\hat{x}^* \in \hat{X}^*$. Положим $x_n^*(x) = \hat{x}^*(\hat{e}_n(x))$, $x \in X$. Ясно, что $x_n^* \in X^*$. Для $\forall \hat{x} = \{x_n\}_{n\in N}$ согласно равенству $\hat{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} e_n(\hat{x})$ получим $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n) = \hat{x}^*(\hat{x})$, т. е. $\{x_n^*\}_{n\in N} \in \hat{Y}$. Пусть теперь $\{x_n^*\}_{n\in N} \in \hat{Y}$. Рассмотрим функционал $\hat{x}^*$ по формуле $\hat{x}^*(\hat{x}) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n)$. Имеем

$$\left\|\hat{x}^*\right\| = \sup_{\|\hat{x}\|=1}\left|\hat{x}^*(\hat{x})\right| = \sup_{\|\hat{x}\|=1}\left|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n)\right| = \left\|\{x_n^*\}_{n\in N}\right\|_{\hat{Y}},$$

т. е. $\hat{x}^* \in \hat{X}^*$. Лемма доказана.

Лемма 1.1.2. *Пусть* $\hat{X}$ *- рефлексивное* CB*-пространство. Тогда сопряженное пространство* $\hat{X}^*$ *является* CB*-пространством.*

Доказательство. Покажем, что подпространства $\hat{E}_k^* = \left\{\hat{x}^* \in \hat{X}^* : x_n^* = 0, n \neq k\right\}$ образуют базис в $\hat{X}$. Для этого согласно критерию базиса из подпространств ([8], стр. 231) достаточно показать полноту, минимальность системы порождённых проекторов $P_n : \hat{X}^* \to \hat{E}_n^*$, $P_n(\hat{x}^*) = \{\delta_{nk} x_k^*\}_{k\in N}$ и равномерную ограниченность последовательности $S_m = \sum_{n=1}^{m} P_n$. Ограниченность проекторов P_n вытекает из следующего неравенства

$$\left\|P_n(\hat{x}^*)\right\| = \sup_{\|\hat{x}\|=1}\left|P_n(\hat{x}^*)(\hat{x})\right| = \sup_{\|\hat{x}\|=1}\left|x_n^*(x_n)\right| = \sup_{\|\hat{x}\|=1}\left|\hat{x}^*(e_n(\hat{x}))\right| \le \|e_n\|\left\|\hat{x}^*\right\|.$$

Пусть $\hat{x} = \{x_n\}_{n\in N} \in \hat{X}$ такой, что $P_n(\hat{x}^*(\hat{x})) = 0$ при любом $n \in N$. Это означает, что $x_n = 0$ при любом $n \in N$ и значит $\hat{x} = 0$, т.е. система $\{P_n\}_{n\in N}$ полна в $\hat{X}^*$. Система $\{P_n\}_{n\in N}$ минимальна в $\hat{X}^*$, ибо $P_n P_k = \delta_{nk} P_n$. Для каждого $\hat{x} \in \hat{X}$ и $\hat{x}^* \in \hat{X}^*$ получим

$$\left|\sum_{n=1}^{m} P_n(\hat{x}^*)(\hat{x})\right| = \left|\sum_{n=1}^{m} x_n^*(x_n)\right| \le M(\hat{x}^*, \hat{x}) < +\infty,$$

где $M(\hat{x}^*, \hat{x})$ - постоянная зависящая только от $\hat{x}^*$ и $\hat{x}$. Последнее соотношение вытекает из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n)$. Применяя дважды теорему о равномерной ограниченности, получим $\left\|\sum_{k=1}^{m} P_k\right\| \le M$. Рассмотрим операторы $\hat{P}_n : X^* \to \hat{X}^*$, $\hat{P}_n(x^*) = \{\delta_{in} x^*\}_{i\in N}$, и $\hat{Q}_n : \hat{X}^* \to X^*$, $\hat{Q}_n(\hat{x}^*) = x_n^*$, , $\hat{x}^* = \{x_n^*\}_{n\in N} \in \hat{X}^*$, $x^* \in X^*$. Имеем

$$\left\|\hat{P}_n(x^*)\right\| = \sup_{\|\hat{x}\|=1} \left|x^*(x_n)\right| \le \left\|\hat{\delta}_n\right\| \left\|x^*\right\|,$$

$$\left\|\hat{Q}_n(\hat{x}^*)\right\| = \sup_{\|x\|=1} \left|x_n^*(x)\right| \le \left\|\hat{e}_n\right\| \left\|\hat{x}^*\right\|.$$

Таким образом, $\{\hat{E}_k^*\}$ образует базис, и значит, $\hat{X}^*$ становится CB-пространством. Лемма доказана.

1.2. b-бесселевы и b-гильбертовы системы в гильбертовых пространствах

Пусть X и H - гильбертовы пространства, Y - банахово пространство и $b: X \times Y \to H$ билинейное отображение, удовлетворяющее условию (1.1.1).

Несложно показать, что при фиксированных $h \in H$ и $y \in Y$ выражение $f_{h,y}(x) = (b(x,y),h)$ определяет линейный непрерывный функционал в X. По теореме Рисса существует единственный элемент $\omega_b(h,y) \in X$, такой, что

$$(b(x,y),h) = (x, \omega_b(h,y)),\ x \in X,\ h \in H,\ y \in Y. \qquad (1.2.1)$$

Из линейности отображения $b(x,y)$ и скалярного произведения следует, что элемент $\omega_b(h,y)$ линеен по $h \in H$ и имеет место соотношение

$$\left\|\omega_b(h,y)\right\|_X = \sup_{\|x\|=1} \left|(\omega_b(h,y),x)\right| = \sup_{\|x\|=1} \left|(b(x,y),h)\right| \le M \|y\|_Y \|h\|_H,$$

где M - постоянная из условия (1.1.1).

Определение 1.2.1. *Системы* $\{y_n\}_{n\in N}\subset Y$ *и* $\{y_n^*\}_{n\in N}\subset Y$ *назовем* b-*биортогональными в* H, *если* $\forall x\in X$

$$\omega_b(b(x,y_k),y_n^*)=\delta_{nk}x,\forall k,n\in N.$$

Пусть системы $\{y_n\}_{n\in N}\subset Y$ и $\{y_n^*\}_{n\in N}\subset Y$ b- биортогональны в H и $\hat{X}$ - KB - пространство. Следующее понятие обобщает понятие бесселевых систем в гильбертовых пространствах.

Определение 1.2.2. *Систему* $\{y_n\}_{n\in N}$ *назовем* b-*бесселевой* ($b_{\hat{X}}$-*бесселевой) в* H *относительно пространства* $\hat{X}$, *если при любом* $h\in H$, $\{\omega_b(h,y_n^*)\}_{n\in N}\in\hat{X}$.

Пусть $\hat{X}$ - CB-пространство с каноническим базисом $\{e_n\}_{n\in N}$.

Имеет место следующий критерий $b_{\hat{X}}$ -бесселевости систем.

Теорема 1.2.1. *Для того, чтобы система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}}$-*бесселевой в* H *необходимо, а в случае* b-*полноты системы* $\{y_n\}_{n\in N}$, *и достаточно, чтобы* $\exists T\in L(H,\hat{X})$: $T(b(x,y_n))=\{\delta_{in}x\}_{i\in N}$, $\forall x\in X$, $n\in N$.

Доказательство. Необходимость. Пусть система $\{y_n\}_{n\in N}$ является $b_{\hat{X}}$ - бесселевой в H. Рассмотрим последовательность операторов T_m по формуле

$$T_m h=\sum_{k=1}^{m}e_k\left(\{\omega_b(h,y_n^*)\}_{n\in N}\right),\ \forall m\in N.$$

В силу того, что $\{e_n\}_{n\in N}$ - канонический базис, то $\lim\limits_{m\to\infty}T_m h$ существует, и тем самым последовательность $\{T_m h\}_{m\in N}$ ограничена. Из принципа равномерной ограниченности следует, что последовательность $\{\|T_m\|\}$ ограничена. Определим оператор T, по формуле $Th=\lim\limits_{m\to\infty}T_m h=\{\omega_b(h,y_n^*)\}_{n\in N}$. Очевидно, что $T\in L(H,\hat{X})$, причем

$$T(b(x,y_n))=\{\omega_b(b(x,y_n),y_k^*)\}_{k\in N}=\{\delta_{kn}x\}_{k\in N},\ \forall x\in X,\ n\in N.$$

Достаточность. Пусть система $\{y_n\}_{n\in N}$ b-полна и существует оператор $T\in L(H,\hat{X})$: $T(b(x,y_k))=\{\delta_{kn}x\}_{k\in N}$ для $\forall x\in X$, $n\in N$. Для $\forall n\in N$ получим

$$\hat{\delta}_k T(b(x, y_n)) = \hat{\delta}_k(\{\delta_{in} x\}_{i \in N}) = \delta_{kn} x, \ \forall k, n \in N.$$

С другой стороны, для $\forall x \in X$ имеем $\omega_b(b(x, y_k), y_n^*) = \delta_{nk} x, \forall k, n \in N$. Отсюда в силу b-полноты системы $\{y_n\}_{n\in N}$ получаем, что $\hat{\delta}_n Th = \omega_b(h, y_n^*)$, $\forall h \in H$, $n \in N$. Поскольку $Th \in \hat{X}$, то из $\hat{\delta}_n Th = \omega_b(h, y_n^*)$ получаем, что $Th = \{\omega_b(h, y_n^*)\}_{n\in N} \in \hat{X}$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекают следующие

Следствие 1.2.1. *Пусть* $\{y_n\}_{n\in N}$ *является* $b_{\hat{X}}$*-бесселевой системой в* H. *Тогда существует положительное число* B *такое, что*

$$\left\| \{\omega(h, y_n^*)\}_{n\in N} \right\| \le B\|h\|, \ \forall h \in H.$$

Следствие 1.2.2. *Пусть системы* $\{y_n\}_{n\in N}$ *и* $\{y_n^*\}_{n\in N}$ b*-полны в* H. *Тогда, для того, чтобы система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}}$*-бесселевой в* H *необходимо и достаточно чтобы* $\exists B > 0$*: для любого конечного* $\{x_n\}$ *из* $\hat{X}$

$$\|\{x_n\}\|_{\hat{X}} \le B \left\| \sum_n b(x_n, y_n) \right\|_H. \tag{1.2.2}$$

Пусть Y_1 - банахово пространство, H_1 - гильбертово пространство и $b_1(x, y): X \times Y_1 \to H_1$ ограниченное билинейное отображение. Пусть система $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y_1$ имеет b_1-биортогональную систему $\{\varphi_n^*\}_{n\in N} \subset Y_1$ и образует b_1-базис в H_1 с пространством последовательностей из коэффициентов $\hat{X}_\Phi$. Пусть K - изоморфизм пространств $\hat{X}_\Phi$ и H_1.

Справедлив следующий критерий $b_{\hat{X}_\Phi}$-бесселевости систем.

Теорема 1.2.2. *Для того, чтобы система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}_\Phi}$*-бесселевой в* H *необходимо, а в случае* b*-полноты системы* $\{y_n\}_{n\in N}$ *в* H, *и достаточно, чтобы* $\exists T \in L(H, H_1)$*:* $T(b(x, y_n)) = b_1(x, \varphi_n)$, $\forall x \in X$, $n \in N$.

Доказательство. Необходимость. Пусть система $\{y_n\}_{n\in N}$ является $b_{\hat{X}_\Phi}$-бесселевой в H. По Теореме 1.2.1 следует, что существует оператор

$T_1 \in L(H,\hat{X}_\Phi)$: $T_1(b(x,y_n)) = \{\delta_{in}x\}_{i\in N}$, $\forall x \in X$, $n \in N$. Положив $T = KT_1$ получаем, что $T \in L(H,H_1)$ и $T(b(x,y_n)) = b_1(x,\varphi_n)$, $\forall x \in X$, $n \in N$.

Достаточность. Пусть существует оператор $T \in L(H_1,H)$ такой, что $T(b_1(x,y_n)) = b(x,\varphi_n)$, $\forall x \in X$, $n \in N$. Для $\forall x \in X$, $n,k \in N$ имеем

$$\omega_{b_1}(T(b(x,y_k)),\varphi_n^*) = \omega_b(b(x,y_k),y_n^*).$$

Отсюда в силу b-полноты $\{y_n\}_{n\in N}$, получаем, что $\omega_{b_1}(Th,\varphi_n^*) = \omega_b(h,y_n^*)$ для $\forall h \in H$ и $\forall n \in N$. Для $\forall h \in H$ имеем $\{\omega_b(h,y_n^*)\}_{n\in N} = \{\omega_{b_1}(Th,\varphi_n^*)\}_{n\in N} \in \hat{X}_\Phi$. Теорема доказана.

Следствие 1.2.3. *Пусть система $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ b-полна в H. Тогда для того, чтобы система $\{y_n\}_{n\in N}$ была $b_{\hat{X}_\Phi}$-бесселевой в H, необходимо и достаточно, чтобы оператор $A_{\hat{X}_\Phi}: \hat{X}_\Phi \to \hat{X}_\Phi$ определенный выражением*

$$A_{\hat{X}_\Phi}\hat{x} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\omega_b(b(x_n,\varphi_n),y_k^*)\right\}_{k\in N}, \quad \hat{x} = \{x_n\}_{n\in N}, \tag{1.2.3}$$

был ограниченным в $\hat{X}_\Phi$.

Пусть выполнено условие $\Omega(Y) = L(H,X)$, $\Omega_b(y)(h) = \omega_b(h,y)$ и $T \in L(H,H_1)$. Тогда можно определить оператор $T_{b_1}^*: Y_1 \to Y$ по выражению $\omega_{b_1}(T(h),\varphi) = \omega_b(h,T_{b_1^*}(\varphi))$, $h \in H$.

В следующей теореме устанавливается критерий существования b-базиса в гильбертовом пространстве и b-бесселевость системы относительно пространства последовательности его коэффициентов.

Теорема 1.2.3. *Пусть $\Omega_b(Y) = L(H,X)$ и $\Omega_{b_1}(Y_1) = L(H_1,X)$. Для того, чтобы существовал $\Phi = \{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y_1$ b_1-базис в H_1 такой, что b-полная система $\{y_n\}_{n\in N}$ была $b_{\hat{X}_\Phi}$-бесселевой в H, необходимо и достаточно чтобы существовали операторы $T \in L(H,H_1)$ и $A: Y \to Y_1$:*

1) $KerT^* = \{0\}$, $T_{b_1}^*A(T^*)_b^*y_n = y_n^*$, $\forall n \in N$;

2) $\left\|\sum_{k=1}^{m} T(b(\omega_{b_1}(h, A(T^*)_b^* y_k), y_k))\right\|_{H_1} \le C\|h\|_{H_1}, \quad \forall h \in H_1,$

где $C > 0$ *- некоторая постоянная.*

Доказательство. Необходимость. Пусть система $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y_1$ образует b_1-базис в H_1 с b_1-биортогональной системой $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$ и пространством последовательностей коэффициентов $\hat{X}_\Phi$, а система $\{y_n\}_{n\in N}$ является $b_{\hat{X}_\Phi}$-бесселевой в H. В силу Теоремы 1.2.2, существует оператор $T \in L(H, H_1)$ такой, что $T(b(x, y_n)) = b_1(x, \varphi_n)$ для $\forall x \in X$, $n \in N$. Следовательно,

$$\omega_{b_1}(T(b(x, y_k)), \varphi_n^*) = \omega_b(b(x, y_k)), y_n^*) . \tag{1.2.4}$$

Из b - биортогональности $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ в H следует, что $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ b-минимальна в H ([8], стр. 153). На самом деле, если $\exists k_0 \in N$, $\forall x \in X$ $(x \ne 0)$ $b_1(x, \varphi_{k_0}) \in \overline{L_{b_1}(\{\varphi_n\}_{n\in N, n\ne k_0})}$, то $\omega_1(b_1(x, \varphi_{k_0}), \varphi_{k_0}^*) = 0$, что противоречит равенству $\omega_{b_1}(b(x, \varphi_{k_0}), \varphi_{k_0}^*) = x$. Поэтому из неравенства

$$\|b_1(x, \varphi_k) - b_1(x, \varphi_{k_0})\| = \|b_1(x, \varphi_k - \varphi_{k_0})\| \le M\|x\|\|\varphi_k - \varphi_{k_0}\|$$

и b_1-минимальности в H_1 системы $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ вытекает минимальность $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ в Y_1.

Определим на $L_{b_1}(\{\varphi_n\}_{n\in N})$ линейный оператор $A: Y \to Y_1$ по формуле $A\varphi_n = \varphi_n^*$, $\forall n \in N$. Корректность определения оператора A следует из минимальности системы $\{\varphi_n\}_{n\in N}$. Поскольку система $\{y_n\}_{n\in N}$ b-полна в H, то из (1.2.4) следует, что $\omega_1(Th, \varphi_n^*) = \omega(h, y_n^*)$ для $\forall h \in H$ и $\forall n \in N$, т. е. $T_{b_1}^* \varphi_n^* = y_n^*$. С другой стороны,

$$\omega_{b_1}(h, \varphi_n) = \omega_b(T^*(h), y_n) = \omega_{b_1}(h, (T^*)_b^* y_n),$$

т. е. $(T^*)_b^* y_n = \varphi_n$. Следовательно, $T_{b_1}^* A(T^*)_b^* y_n = y_n^*$. Учитывая b_1-полноту в H_1 системы $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ получаем, что $\overline{\operatorname{Im} T} = H_1$, т. е. $(\operatorname{Im} T)^\perp = \{0\}$. Таким образом, $Ker T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp = \{0\}$. Далее, в силу критерия b_1-базисности $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ существует некоторая постоянная $C > 0$:

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} T(b(\omega_{b_1}(h, A(T^*)_b^* y_k), y_k))\right\|_{H_1} = \left\|\sum_{k=1}^{m} b_1(\omega_{b_1}(h, \varphi_k^*), \varphi_k)\right\|_{H_1} \le C\|h\|_{H_1}, \quad \forall h \in H_1.$$

Достаточность. Пусть существуют операторы $T \in L(H, H_1)$ и $A : Y \to Y_1$ удовлетворяющие условиям 1) и 2). Определим систему $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ согласно выражению $(T^*)_b^* y_n = \varphi_n$. Тогда $T(b(x, y_n)) = b_1(x, \varphi_n)$, $\forall x \in X$, $n \in N$. Установим b_1-базисность в H_1 системы $\{\varphi_n\}_{n\in N}$. Положим $A\varphi_n = \varphi_n^*$, $n \in N$. Тогда согласно условию $T_b^* A(T^*)_b^* y_n = y_n^*$ получим

$$\delta_{nk} x = \omega_b(b(x, y_k), T_b^* A(T^*)_b^* y_n) = \omega_{b_1}(Tb(x, y_k), A\varphi_n) = \omega_{b_1}(b_1(x, \varphi_k), \varphi_n^*),$$

т. е. системы $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ и $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$ b_1- биортогональны в H_1. Покажем, что система $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ b_1- полна в H_1. Пусть $h \in H_1$ такой, что $h \perp \overline{L_{b_1}(\{\varphi_n\}_{n\in N})}$. Тогда для $\forall x \in X$ и $n \in N$ получим

$$0 = (h, b_1(x, \varphi_n)) = (h, Tb(x, y_n)) = (T^* h, b(x, y_n)).$$

Отсюда, из b-полноты системы $\{y_n\}_{n\in N}$ следует, что $T^* h = 0$. Однако, $KerT^* = \{0\}$, и значит $h = 0$, т. е. система $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ b_1- полна в H_1. Из условия 2) следует равномерная ограниченность последовательности проекторов $\sum_{k=1}^{m} b_1(\omega_{b_1}(h, \varphi_k^*), \varphi_k)$, $m \in N$. Действительно,

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} b_1(\omega_{b_1}(h, \varphi_k^*), \varphi_k)\right\|_{H_1} = \left\|\sum_{k=1}^{m} T(b(\omega_{b_1}(h, A(T^*)_b^* y_k), y_k))\right\|_{H_1} \le C\|h\|_{H_1}.$$

Таким образом, в силу Теоремы 1.1.1 система $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ образует b_1-базис в H_1. Остальная часть доказательства следует из Теоремы 1.2.2. Теорема доказана.

Следующее понятие обобщает понятие гильбертовых систем в гильбертовых пространствах.

Определение 1.2.3. *Систему $\{y_n\}_{n\in N}$ назовем b-гильбертовой ($b_{\hat{X}}$-гильбертовой) в H относительно $\hat{X}$, если $\forall \hat{x} \in \hat{X}$, $\exists h \in H$: $\{\omega_b(h, y_n^*)\}_{n\in N} = \hat{x}$.*

Пусть $\hat{X}$ - CB-пространство с каноническим базисом $\{e_n\}_{n\in N}$. Приведем критерий $b_{\hat{X}}$-гильбертовости систем.

Теорема 1.2.4. *Для того, чтобы система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}}$*- гильбертовой в* H *достаточно, а в случае* b*-полноты системы* $\{y_n^*\}_{n\in N}$*, и необходимо, чтобы* $\exists T \in L(\hat{X}, H)$*:* $T(\{\delta_{in}x\}_{i\in N}) = b(x, y_n)$*,* $\forall x \in X$ *,* $n \in N$ *.*

Доказательство. Достаточность. Пусть существует оператор $T \in L(\hat{X}, H)$: $T(\{\delta_{in}x\}_{i\in N}) = b(x, y_n)$, $\forall x \in X$, $n \in N$. Возьмем $\forall \hat{x} \in \hat{X}$ и напишем его разложение по каноническому базису $\{e_n\}_{n\in N}$ в виде $\hat{x} = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(\hat{x})$. Тогда

$$T\hat{x} = \sum_{n=1}^{\infty} T(e_n(\hat{x})) = \sum_{n=1}^{+\infty} b(x_n, y_n).$$

Положим $h = \sum_{n=1}^{+\infty} b(x_n, y_n)$. Очевидно, что $\omega_b(h, y_n^*) = x_n$. Таким образом, система $\{y_n\}_{n\in N}$ является $b_{\hat{X}}$- гильбертовой в H .

Необходимость. Пусть система $\{y_n\}_{n\in N}$ является $b_{\hat{X}}$- гильбертовой в H, а система $\{y_n^*\}_{n\in N}$ b-полна в H. Следовательно, $\forall \hat{x} \in \hat{X}$ $\exists h \in H : \{\omega(h, y_n^*)\}_{n\in N} = \hat{x}$. Такой элемент $h \in H$ единственный. В самом деле, пусть существует другой $h_1 \in H$ такой, что $\{\omega_b(h_1, y_n^*)\}_{n\in N} = \hat{x}$. Тогда $\omega_b(h - h_1, y_n^*) = 0$, для $\forall n \in N$. Отсюда в силу b-полноты системы $\{y_n^*\}_{n\in N}$ в H получаем $h = h_1$. Определим оператор T по формуле $T\hat{x} = h$. Линейность оператора T очевидна. Покажем его ограниченность. Для этого достаточно проверить замкнутость T . Пусть последовательность $\hat{x}^{(m)} = \{x_n^{(m)}\}_{n\in N} \in \hat{X}$ такая, что

$$\left\|\hat{x}^{(m)} - \hat{x}\right\| \to 0, \ \left\|T(\hat{x}^{(m)}) - h\right\| \to 0,$$

при $m \to \infty$, где $\hat{x} = \{x_n\}_{n\in N}$. Из $\omega_b(T(\hat{x}^{(m)}), y_n^*) = x_n^{(m)}$, $\left\|x_n^{(m)} - x_n\right\| \to 0$ и $\left\|\omega_b(T(\hat{x}^{(m)}), w) - \omega_b(h, w)\right\| \to 0$ при $m \to \infty$, следует, что $\omega_b(h, y_n^*) = x_n$, т. е. $T\hat{x} = h$, и тем самым, оператор T замкнут. Очевидно, что имеет место соотношение $T(\{\delta_{in}x\}_{i\in N}) = b(x, y_n)$, $\forall x \in X$, $n \in N$. Теорема доказана.

Следствие 1.2.4. *Пусть системы* $\{y_n\}_{n\in N}$ *и* $\{y_n^*\}_{n\in N}$ *ь-полны в* H. *Для того чтобы система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}}$*- гильбертовой в* H, *необходимо и достаточно, чтобы* $\exists A>0$ *, что для любой конечной последовательности* $\{x_n\}$

$$A\left\|\sum_n b(x_n, y_n)\right\|_H \le \left\|\{x_n\}\right\|_{\hat{X}}. \qquad (1.2.5)$$

Следствие 1.2.5. *Пусть система* $\{\varphi_n\}_{n\in N}\subset Y$ *образует* b*-базис в* H *с* b*-биортогональной системой* $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$ *. Для того, чтобы система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}_\Phi}$ *-гильбертовой в* H *достаточно, а в случае* *ь-полноты системы* $\{y_n^*\}_{n\in N}$, *и необходимо* $\exists T\in L(H_1,H)$: $T(b_1(x,\varphi_n)) = b(x,y_n)$, $\forall x\in X$, $n\in N$.

В следующей теореме устанавливается связь между бесселевостью и гильбертовостью системы в гильбертовом пространстве.

Теорема 1.2.5. *Пусть системы* $\{y_n\}_{n\in N}$ *и* $\{y_n^*\}_{n\in N}$ *ь-полны в* H *. Тогда, для того чтобы система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}}$*-гильбертовой в* H *необходимо и достаточно, чтобы* $\{y_n^*\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}^*}$*-бесселевой в* H.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{y_n\}_{n\in N}$ является $b_{\hat{X}}$-гильбертовой в H. Тогда по Теореме 1.2.4 существует оператор $T\in L(\hat{X},H)$: $T(\{\delta_{in}x\}_{i\in N}) = b(x,y_n)$, $\forall x\in X$, $n\in N$. Для $\forall x\in X$ получим

$$(T^*h,\hat{e}_n(x)) = (h,T\hat{e}_n(x)) = (h,b(x,y_n)) = (\omega_b(h,y_n),x),\ h\in H,$$

т. е. $T^*h = \{\omega_b(h,y_n)\}_{n\in N}$. Очевидно, что $T^*b(x,y_n^*) = \{\delta_{in}x\}_{i\in N}$. Так как $\hat{X}^*$ является CB -пространством, в силу Теоремы 1.2.1 $\{y_n^*\}_{n\in N}$ является $b_{\hat{X}^*}$-бесселевой в H.

Достаточность. Пусть система $\{y_n^*\}_{n\in N}$ является $b_{\hat{X}^*}$-бесселевой в H. Согласно критерию $b_{\hat{X}^*}$-бесселевости системы $\{y_n^*\}_{n\in N}$ существует оператор $T\in L(H,\hat{X}^*)$: $T(b(x,y_n^*)) = \{\delta_{in}x\}_{i\in N}$, $\forall x\in X$, $n\in N$. Для $\forall\hat{x} = \{x_n\}_{n\in N}\in\hat{X}^*$ получим

$$(x,x_n) = ((\{\delta_{in}x\}_{i\in N}),\hat{x}) = (T(b(x,y_n^*)),\hat{x}) = (b(x,y_n^*)),T^*\hat{x}) = (x,\omega_b(T^*\hat{x},y_n^*)).$$

Отсюда следует, что $\omega_b(T^*\hat{x}, y_n^*) = x_n$ и в силу b-полноты в H системы $\{y_n^*\}_{n\in N}$ имеет место соотношение $T^*\{\delta_{in}x\}_{i\in N} = b(x, y_n)$. Таким образом из Теоремы 1.2.4 следует, что $\{y_n\}_{n\in N}$ является $b_{\hat{X}}$-гильбертовой в H. Теорема доказана.

Из этого результата, Следствия 1.2.3 и Теоремы 1.2.3 непосредственно следуют

Теорема 1.2.6. *Пусть система* $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *образует* b*-базис в* H *с* b*-биортогональной системой* $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$, b*-биортогональные системы* $\{y_n\}_{n\in N}$ *и* $\{y_n^*\}_{n\in N}$ b*-полны в* H*. Тогда для того, чтобы* $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}_\Phi}$*-гильбертовой в* H*, необходимо и достаточно, чтобы оператор* $A_{\hat{X}_\Phi} : \hat{X}_\Phi \to \hat{X}_\Phi$*:*

$$A_{\hat{X}_\Phi}\hat{x} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \omega_b(b(x_n, \varphi_n^*), y_k)\right\}_{k\in N}, \quad \hat{x} = \{x_n\}_{n\in N}, \tag{1.2.6}$$

был ограниченным в $\hat{X}_\Phi$.

Теорема 1.2.7. *Пусть* $\Omega_b(Y) = L(H, X)$ *и* $\Omega_{b_1}(Y_1) = L(H_1, X)$*. Для того чтобы существовал* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y_1$ b_1*-базис в* H_1 *такой, что* b*-полная система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}_\Phi}$*-гильбертовой в* H*, необходимо и достаточно чтобы существовали операторы* $T \in L(H_1, H)$ *и* $A : Y_1 \to Y$*:*

1) $KerT^* = \{0\}$, $T_b^* A (T^*)_{b_1}^* y_n^* = y_n$, $\forall n \in N$*;*

2) $\left\| \sum_{k=1}^{m} T(b(\omega_{b_1}(h, A(T^*)_b^* y_k^*), y_k^*)) \right\|_{H_1} \le C\|h\|_{H_1}$, $\forall h \in H_1$,

где $C > 0$ *- некоторая постоянная.*

1.3. b-базисы Рисса в гильбертовых пространствах

Пусть X и H - гильбертовы пространства, Y - банахово пространство и $b : X \times Y \to H$ билинейное отображение, удовлетворяющее условию (1.1.1). Пусть $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ и $\hat{X}$ - некоторое KB-пространство над X.

Следующее понятие обобщает понятие базиса Рисса.

Определение 1.3.1. *b-базис $\{y_n\}_{n\in N}\subset Y$ в H назовем b-базисом Рисса относительно $\hat{X}$ ($b_{\hat{X}}$-базисом Рисса), если его пространство последовательностей коэффициентов совпадает с $\hat{X}$.*

Пусть $\hat{X}$ - CB-пространство с каноническим базисом $\{e_n\}_{n\in N}$. Справедлив следующий критерий $b_{\hat{X}}$-базисности Рисса в H.

Теорема 1.3.1. *Пусть система $\{y_n\}_{n\in N}$ b-полна в H и имеет b-полную в H b-биортогональную систему $\{y_n^*\}_{n\in N}$. Для того, чтобы $\{y_n\}_{n\in N}$ была $b_{\hat{X}}$-базисом Рисса в H, необходимо и достаточно, чтобы существовал ограниченно обратимый оператор $T\in L(H,\hat{X})$: $T(b(x,y_n))=\{\delta_{in}x\}_{i\in N}$, $\forall x\in X$, $n\in N$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{y_n\}_{n\in N}$ является $b_{\hat{X}}$-базисом Рисса в H. Тогда ясно, что система $\{y_n\}_{n\in N}$ является одновременно $b_{\hat{X}}$-бесселевой и $b_{\hat{X}}$-гильбертовой в H. В силу Теорем 1.2.1 и 1.2.4 существуют операторы $T\in L(H,\hat{X})$ и $S\in L(\hat{X},H)$ такие, что $T(b(x,y_n))=\{\delta_{in}x\}_{i\in N}$ и $S(\{\delta_{in}x\}_{i\in N})=b(x,y_n)$, $\forall x\in X$, $\forall n\in N$. Следовательно, $(ST)(b(x,y_n))=b(x,y_n)$. Отсюда согласно b-базисности $\{y_n\}_{n\in N}$, получаем $ST(h)=h$, $\forall h\in H$. Аналогично получаем, что $TS(h)=h$, $\forall h\in H$. Значит оператор T ограниченно обратим.

Достаточность. Пусть существует ограниченно обратимый оператор $T\in L(H,\hat{X})$: $T(b(x,y_n))=\{\delta_{in}x\}_{i\in N}$, $\forall x\in X$, $n\in N$. В силу Теорем 1.2.1 и 1.2.4 система $\{y_n\}_{n\in N}$ является одновременно $b_{\hat{X}}$-бесселевой и $b_{\hat{X}}$-гильбертовой в H. Покажем, что $\{y_n\}_{n\in N}$ является b-базисом в H. Возьмем произвольный $\forall h\in H$. Разложив элемент $Th=\hat{x}$ по системе $\{e_n\}_{n\in N}$ получим

$$h=T^{-1}\hat{x}=\sum_{n=1}^{+\infty}T^{-1}(\{\delta_{kn}x_n\}_{k\in N})=\sum_{n=1}^{+\infty}b(x_n,y_n).$$

Проверим единственность такого представления. Пусть имеет место другое разложение $h=\sum_{n=1}^{+\infty}b(t_n,y_n)$. Тогда действуя на обе части последнего равенства оператором T, получим

$$Th = \sum_{n=1}^{+\infty} T(b(t_n, y_n)) = \{t_n\}_{n\in N},$$

т. е. $x_n = t_n$, $n \in N$. Таким образом, $\{y_n\}_{n\in N}$ является b-базисом в H. Теорема доказана.

Из Теоремы 1.3.1 непосредственно следуют

Следствие 1.3.1. *Пусть система* $\{y_n\}_{n\in N}$ b*-полна в* H *и имеет* b*-полную биортогональную в* H *систему* $\{y_n^*\}_{n\in N}$. *Тогда для того, чтобы* $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}}$*-базисом Рисса в* H, *необходимо и достаточно, чтобы существовали числа* $A > 0$ *и* $B > 0$ *такие, что для* $\{x_n\}$ *из* $\hat{X}$

$$A\|\{x_n\}\| \le \left\|\sum_n b(x_n, y_n)\right\| \le B\|\{x_n\}\|.$$

Следствие 1.3.2. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y_1$ *некоторый* b_1*-базис в* H_1, *с пространством последовательностей из коэффициентов* $\hat{X}_\Phi$. *Система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *образует* $b_{\hat{X}_\Phi}$*-базис Рисса в* H, *тогда и только тогда, когда существует ограниченно обратимый оператор* $A \in L(H, H_1)$: $A(b(x, y_n)) = b_1(x, \varphi_n)$, $\forall x \in X$, $n \in N$.

Следствие. 1.3.3. *Пусть* $\Omega_b(Y) = L(H, X)$ *и системы* $\{y_n\}_{n\in N}$ *и* $\{y_n^*\}_{n\in N}$ b*-полны в* H. *Тогда для того, чтобы система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}_\Phi}$*-базисом Рисса в* H, *необходимо и достаточно, чтобы оператор* $A_{\hat{X}_\Phi} : \hat{X}_\Phi \to \hat{X}_\Phi$ *определенный выражением*

$$A_{\hat{X}_\Phi}\hat{x} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \omega(b(x_n, \varphi_n), y_k^*)\right\}_{k\in N}, \ \hat{x} = \{x_n\}_{n\in N},$$

был ограниченно обратим в $\hat{X}_\Phi$.

В следующей теореме дается критерий существования b-базиса Рисса в гильбертовом пространстве.

Теорема 1.3.2. *Пусть выполнены условия* $\Omega_b(Y) = L(H, X)$, $\Omega_{b_1}(Y_1) = L(H_1, X)$. *Для того, чтобы существовал* b_1*-базис* $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *в* H_1 *такой, что* b*-*

полная система $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}_\Phi}$ *-базисом Рисса в* H*, необходимо и достаточно чтобы существовали ограниченно обратимый оператор* $T \in L(H,H_1)$ *и оператор* $A: Y \to Y_1$ *:*

1) $KerT^* = \{0\}$, $T_{b_1}^* A(T^*)_b^* y_n = y_n^*$, $\forall n \in N$;

2) $\left\| \sum_{k=1}^{m} T(b(\omega_{b_1}(h, A(T^*)_b^* y_k), y_k)) \right\|_{H_1} \le C\|h\|_{H_1}$, $\forall h \in H_1$,

где $C > 0$ *- некоторая постоянная.*

Доказательство. Необходимость теоремы непосредственно вытекает из Теорем 1.3.1 и 1.2.3.

Достаточность. Пусть существуют ограниченно обратимый оператор $T \in L(H,H_1)$ и оператор $A: Y \to Y_1$, удовлетворяющие условиям 1) и 2). Положим $(T^*)_b^* y_n = \varphi_n$ и $A\varphi_n = \varphi_n^*$. Из Теоремы 1.2.3 следует, что система $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y_1$ образует b_1-базис в H_1, $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$ является b_1-биортогональной к $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y_1$ и выполняется условие $T(b(x,y_n)) = b_1(x,\varphi_n)$, $\forall x \in X$, $n \in N$. Тогда по Теореме 1.3.1 $\{y_n\}_{n\in N}$ образует $b_{\hat{X}_\Phi}$ -базис Рисса в H. Теорема доказана.

1.4. b -бесселевы, b -гильбертовы системы и b -Рисс базисы в банаховых пространствах

Пусть X, Y и Z - банаховые пространства с соответствующими нормами, $b(x,y): X \times Y \to Z$ - билинейное отображение, удовлетворяющее условию (1.1.1).

Пусть $\hat{X}$ - CB-пространство над X с каноническим базисом $\{e_n\}_{n\in N}$, $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ и $\{y_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z,X)$ - пара b -биортогональных систем.

Дадим банаховы обобщения понятий бесселевых и гильбертовых систем для пары b-биортогональных систем.

Определение 1.4.1. *Систему* $\{y_n\}_{n\in N}$ *назовём* b*-бесселевой в* Z *относительно пространства* $\hat{X}$ *(*$b_{\hat{X}}$*-бесселевой в* Z*), если* $\forall z\in Z$ $\{y_n^*(z)\}_{n\in N}\in\hat{X}$.

Определение 1.4.2. *Систему* $\{y_n^*\}_{n\in N}$ *назовем* b*-гильбертовой в* Z *относительно* $\hat{X}$ *(*$b_{\hat{X}}$*-гильбертовой в* Z*), если* $\forall\hat{x}\in\hat{X}$ $\exists z\in Z$*:* $\hat{x}=\{y_n^*(z)\}_{n\in N}$.

Имеет место следующий критерий $b_{\hat{X}}$-бесселевости систем.

Теорема 1.4.1. *Для того, чтобы система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}}$*-бесселевой в* Z *необходимо, а в случае* b*-полноты системы* $\{y_n\}_{n\in N}$*, и достаточно, чтобы* $\exists T\in L(Z,\hat{X})$*:* $T(b(x,y_n))=\{\delta_{in}x\}_{i\in N}$, $\forall x\in X$, $n\in N$.

Доказательство. Необходимость. Пусть система $\{y_n\}_{n\in N}$ является $b_{\hat{X}}$-бесселевой в Z. Тогда $\forall z\in Z$ $\{y_n^*(z)\}_{n\in N}\in\hat{X}$. Определим оператор $T:Z\to\hat{X}$ по формуле $Tz=\{y_n^*(z)\}_{n\in N}$. Ясно, что $T(b(x,y_n))=\{\delta_{in}x\}_{i\in N}$, $\forall x\in X$, $n\in N$. Остается доказать ограниченность оператора T. Рассмотрим последовательность операторов $T_m\in L(Z,\hat{X})$ по формуле

$$T_m z=\sum_{k=1}^{m}e_k\left(\{y_n^*(z)\}_{n\in N}\right),\ \forall m\in N.$$

Так как $\lim_{m\to\infty}T_m z=Tz$, по принципу равномерной ограниченности последовательность $\{\|T_m\|\}$ ограничена. Таким образом, оператор T ограничен.

Достаточность. Пусть система $\{y_n\}_{n\in N}$ b-полна и существует $T\in L(Z,\hat{X})$: $T(b(x,y_n))=\{\delta_{in}x\}_{i\in N}$, $\forall x\in X$, $n\in N$. Для $\forall n\in N$ получим

$$\hat{\delta}_k T(b(x,y_n))=\hat{\delta}_k(\{\delta_{in}x\}_{i\in N})=\delta_{kn}x,\ \forall k,n\in N.$$

Отсюда учитывая b-полноту $\{y_n\}_{n\in N}$ получим $\hat{\delta}_k T(z)=y_k^*(z)$. Следовательно, $\forall z\in Z$ получаем $\{y_n^*(z)\}_{n\in N}=Tz\in\hat{X}$, т. е. $\{y_n\}_{n\in N}$ является $b_{\hat{X}}$-бесселевой в Z. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы непосредственно вытекают следующие

Следствие 1.4.1. *Пусть система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *является* $b_{\hat{X}}$*-бесселевой в* Z. *Тогда существует положительное число* B *такое, что* $\left\|\{y_n^*(z)\}_{n\in N}\right\| \le B\|z\|$, $\forall z \in Z$

.

Следствие 1.4.2. *Пусть система* $\{y_n\}_{n\in N}$ b*-полна в* Z. *Тогда, для того чтобы система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}}$*-бесселевой в* H *необходимо и достаточно чтобы существовало число* $B>0$ *такое, что для любого конечной* $\{x_n\}$ *из* $\hat{X}$

$$\|\{x_n\}\| \le B\left\|\sum_n b(x_n, y_n)\right\|. \qquad (1.4.1)$$

Пусть Y_1 и Z_1 - банаховые пространства с соответствующими нормами, $b_1 : X\times Y_1 \to Z_1$- билинейное отображение, удовлетворяющее условию:

$$\exists m_1, M_1\rangle 0: \quad m_1\|x\|\|y\| \le \|b_1(x,y)\| \le M_1\|x\|\|y\|,\ x\in X,\ y\in Y_1. \qquad (1.4.2)$$

Пусть система $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y_1$ образует b_1-базис в Z_1 с пространством последовательностей из коэффициентов $\hat{X}_\Phi$. Обозначим через K - изоморфизм пространств $\hat{X}_\Phi$ и Z_1.

Приведем критерий $b_{\hat{X}_\Phi}$ -бесселевости систем.

Теорема 1.4.2. *Для того, чтобы система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *была* $b_{\hat{X}_\Phi}$ *-бесселевой в* Z *необходимо, а в случае* b*-полноты системы* $\{y_n\}_{n\in N}$ *в* Z, *и достаточно чтобы существовал оператор* $T\in L(Z,Z_1)$: $T(b(x,y_n)) = b_1(x,\varphi_n)$, $\forall x\in X$, $n\in N$.

Доказательство. Необходимость. Пусть система $\{y_n\}_{n\in N}$ является $b_{\hat{X}_\Phi}$ - бесселевой в Z. По Теореме 1.4.1 существует $T_1\in L(Z,\hat{X}_\Phi)$: $T_1(b(x,y_n)) = \{\delta_{in}x\}_{i\in N}$, $\forall x\in X$, $n\in N$. Следовательно, оператор $T = KT_1$ удовлетворяет условиям теоремы.

Достаточность. Пусть $\exists T\in L(Z,Z_1)$: $T(b(x,y_n)) = b_1(x,\varphi_n)$, $\forall x\in X$, $n\in N$. Тогда $\forall x\in X$, $n,k\in N$ получим

$$\varphi_n^* T(b(x,y_k)) = \varphi_n^*(b_1(x,\varphi_k)) = \delta_{nk}x = y_n^*(b_1(x,y_k)).$$

Отсюда в силу b-полноты $\{y_n\}_{n\in N}$ следует, что $\varphi_n^* Tz = y_n^*(z)$. Тогда $\forall z \in Z$ получим $\{y_n^*(z)\}_{n\in N} = \{\varphi_n^*(Tz)\}_{n\in N} = K^{-1}Tz \in \hat{X}_\Phi$. Теорема доказана.

Следствие 1.4.3. *Пусть $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ – b-базис в Z, с пространством последовательностей из коэффициентов $\hat{X}_\Phi$. Тогда для того, чтобы система $\{y_n\}_{n\in N}$ была $b_{\hat{X}_\Phi}$-бесселевой в Z, необходимо и достаточно, чтобы оператор $A_{\hat{X}_\Phi} : \hat{X}_\Phi \to \hat{X}_\Phi$, определенный выражением*

$$A_{\hat{X}_\Phi}\hat{x} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} y_k^*(b(x_n,\varphi_n))\right\}_{k\in N}, \quad \hat{x} = \{x_n\}_{n\in N}, \tag{1.4.3}$$

был ограниченным в $\hat{X}_\Phi$.

Пусть $T \in L(Z, Z_1)$. Рассмотрим $\forall f \in L(Z_1, X)$ оператор $g(z) = f(Tz)$, $\forall z \in Z$. Очевидно, что из $T \in L(Z, Z_1)$ и $f \in L(Z_1, X)$ следует $g \in L(Z, X)$. Определим оператор T^{b^*} по формуле $T^{b^*} f = g$. Итак, $f(Tz) = (T^{b^*} f)(z)$, $\forall z \in Z$. Обозначим через $L_{b,Y}(X,Z) = \{y \in Y, b(\cdot, y) \in L(X,Z)\}$. Если положить $L_{b_1,Y_1}(X, Z_1) = L(X, Z_1)$, то можно определить оператор $T_b : Y \to Y_1$ по формуле $Tb(x,y) = b_1(x, T_b y)$.

Имеет место критерий существования b-базиса и b-бесселевости системы относительно пространства последовательностей его коэффициентов.

Теорема 1.4.3. *Пусть выполнено условие $L_{b_1,Y_1}(X, Z_1) = L(X, Z_1)$. Тогда для того, чтобы существовал b_1-базис $\Phi = \{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y_1$ в Z_1 такой, что b-полная система $\{y_n\}_{n\in N}$ была $b_{\hat{X}_\Phi}$-бесселевой в Z, необходимо и достаточно, чтобы существовали операторы $T \in L(Z, Z_1)$ и $A : Y_1 \to L(Z_1, X)$ с $D_A = L(\{T_b y_n\}_{n\in N})$ удовлетворяющие условиям:*

1) $KerT^* = \{0\}$, $T^{b_1^*} A T_b y_n = y_n^*$, $\forall n \in N$;

2) $\left\| \sum_{k=1}^{m} T(b(A(T_b^* y_k)(z), y_k)) \right\| \le C\|z\|$, $\forall z \in Z_1$,

где $C > 0$ - некоторая постоянная.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что существует система $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y_1$ образующая b_1-базис в Z_1 и b-полная система $\{y_n\}_{n\in N}$ является $b_{\hat{X}_\Phi}$ -

бесселевой в Z. В силу Теоремы 1.4.2 существует оператор $T \in L(Z, Z_1)$ такой, что $T(b(x, y_n)) = b_1(x, \varphi_n)$ для $\forall x \in X$, $n \in N$, и имеет место равенство $\varphi_n^*(Tz) = y_n^*(z)$, т. е. $T^{b_1*}\varphi_n^* = y_n^*$, где $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$ - b_1-биортогональная в Z_1 система к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$. С другой стороны, согласно условию $L_{b_1,Y_1}(X, Z_1) = L(X, Z_1)$ получаем, что $T_b y_n = \varphi_n$. $n \in N$. Известно, что из b-биортогональности $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ в Z следует ее b-минимальность в Z, а также ее минимальность в Y_1 ([8], стр. 153). Поэтому можно определить на $L(\{\varphi_n\}_{n\in N})$ линейный оператор $A: Y \to Y_1$ по формуле $A\varphi_n = \varphi_n^*$, $\forall n \in N$. Имеем

$$y_n^* = T^{b_1*}\varphi_n^* = T^{b_1*}A\varphi_n = T^{b_1*}AT_b y_n.$$

Возьмем $f \in KerT^*$. Для $\forall x \in X$ и $\forall n \in N$ имеем

$$0 = T^* f(b(x, y_n)) = f(b_1(x, \varphi_n)).$$

Отсюда в силу b_1-базисности в Z_1 системы $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ следует $f(z) = 0$, $\forall z \in Z_1$. Значит $f = 0$, т. е. $KerT^* = \{0\}$. Наконец, по Теореме 1.1.1 существует $C > 0$, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} T(b(A(T_b y_k)(z), y_k)) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{m} b_1(\varphi_n^*(z), \varphi_n) \right\| \le C\|z\|, \quad \forall z \in Z_1.$$

Достаточность. Пусть существуют операторы $T \in L(Z, Z_1)$ и $A: Y_1 \to L(Z_1, X)$ удовлетворяющие условиям 1) и 2). Положим $T_b y_n = \varphi_n$, и $A\varphi_n = \varphi_n^*$. Ясно, что $T(b(x, y_n)) = b_1(x, \varphi_n)$, $\forall x \in X$, $n \in N$. Далее, системы $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ и $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$ b_1-биортогональны в Z_1. На самом деле,

$$\varphi_n^*(b_1(x, \varphi_k)) = A\varphi_n(b_1(x, T_b y_k)) = A\varphi_n(T(b(x, y_k)) =$$

$$= T^{b*}(A\varphi_n)(b(x, y_k)) = T^{b*}(AT_b y_n)(b(x, y_k)) = y_n^*(b(x, y_k)) = \delta_{nk} x.$$

Если система $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ не b_1-полна в Z_1, то в Z_1 существует ненулевой линейный непрерывный функционал f такой, что $f(b_1(x, \varphi_n)) = 0$, $\forall n \in N$. Тогда

$$0 = f(b_1(x, \varphi_n)) = f(Tb(x, y_n)) = T^* f(b(x, y_n)).$$

Отсюда, из b-полноты системы $\{y_n\}_{n\in N}$, следует, что $T^* f(z) = 0$, $\forall z \in Z$, т. е. $T^* f = 0$. Но по условию $KerT^* = \{0\}$. Поучили противоречие. Это означает, что $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ является b_1-полной в Z_1. Теперь проверим равномерную ограниченность проекторов $P_m(z)=\sum_{k=1}^{m} b_1(\varphi_k^*(z),\varphi_k)$. Согласно условию 2) для $\forall z\in Z_1$ и $\forall m\in N$ получим

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} b_1(\varphi_k^*(z),\varphi_k)\right\|_{Z_1} = \left\|\sum_{k=1}^{m} T(b(A(T_b y_k)(z),y_k))\right\|_{Z_1} \le C\|z\|_{Z_1}.$$

Таким образом, в силу критерия b_1-базисности, система $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ образует b_1-базис в Z_1, а из Теоремы 1.4.2 $\{y_n\}_{n\in N}$ $b_{\hat{X}_\Phi}$-бесселева в Z. Теорема доказана.

Справедлив следующий критерий $b_{\hat{X}}$-гильбертовости систем.

Теорема 1.4.4. *Для того, чтобы система $\{y_n\}_{n\in N}$ была $b_{\hat{X}}$- гильбертовой в Z достаточно, а в случае полноты системы $\{y_n^*\}_{n\in N}$, и необходимо, $\exists T\in L(\hat{X},Z)$: $T(\{\delta_{in}x\}_{i\in N})=b(x,y_n)$, $\forall x\in X$, $n\in N$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть существует оператор $T\in L(\hat{X},Z)$,такой, что $T(\{\delta_{in}x\}_{i\in N})=b(x,y_n)$, $\forall x\in X$, $n\in N$. Тогда для $\forall\hat{x}\in\hat{X}$ учитывая разложение $\hat{x}=\sum_{n=1}^{\infty} e_n(\hat{x})$ получим $T\hat{x}=\sum_{n=1}^{\infty} T(e_n(\hat{x}))=\sum_{n=1}^{+\infty} b(x_n,y_n)=z$. Следовательно, $y_n^*(z)=x_n$, т. е. система $\{y_n\}_{n\in N}$ является $b_{\hat{X}}$- гильбертовой в Z.

Необходимость. Пусть система $\{y_n\}_{n\in N}$ является $b_{\hat{X}}$- гильбертовой в Z и система $\{y_n^*\}_{n\in N}$ полна в Z. Тогда $\forall\hat{x}\in\hat{X}$, $\exists z\in Z$: $\{y_n^*(z)\}_{n\in N}=\hat{x}$. Покажем единственность такого элемента. Если существует другой $\exists z_1\in Z$ удовлетворяющий условию $\{y_n^*(z_1)\}_{n\in N}=\hat{x}$, то $y_n^*(z-z_1)=0$ для $\forall n\in N$. Отсюда из полноты $\{y_n^*\}_{n\in N}$ вытекает, что $z=z_1$. Таким образом, определяется линейный оператор T по формуле $T\hat{x}=z$. Покажем ограниченность оператора T. Возьмем произвольный $\hat{x}\in\hat{X}$. Пусть последовательность $\hat{x}^{(m)}=\{x_n^{(m)}\}_{n\in N}\in\hat{X}$ сходится в $\hat{X}$ к элементу $\hat{x}$, а последовательность $T(\hat{x}^{(m)})=z_m$ сходится к z. Из $\lim_{m\to\infty} y_n^*(z_m)=y_n^*(z)$ и $\lim_{m\to\infty} y_n^*(z_m)=\lim_{m\to\infty} x_n^{(m)}=x_n$ в силу единственности предела имеем $y_n^*(z)=x_n$. Таким образом, $T\hat{x}=z$, т. е. T является замкнутым оператором. По теореме о замкнутом графике T является непрерывным оператором. С другой стороны ясно, что $T(\{\delta_{in}x\}_{i\in N}) = b(x, y_n)$, $\forall x \in X$, $n \in N$. Теорема доказана.

Следствие 1.4.4. *Пусть система $\{y_n\}_{n\in N}$ b-полна в Z, а система $\{y_n^*\}_{n\in N}$ полна в Z^*. Для того чтобы система $\{y_n\}_{n\in N}$ была $b_{\hat{X}}$- гильбертовой в Z, необходимо и достаточно, чтобы $\exists A > 0$ такое, что для любой конечной $\{x_n\}$ из $\hat{X}$: $A\left\|\sum_n b(x_n, y_n)\right\| \le \|\{x_n\}\|$.*

Определим отображение $b^* : Z^* \times Y \to X^*$ по формуле

$$b^*(f, y)(x) = f(b(x, y)),\ f \in Z^*,\ y \in Y,\ x \in X. \qquad (1.4.4)$$

Легко показать, что отображение b^* является билинейным и удовлетворяет условию $\|b^*(f, y)\| \le M\|f\|\|y\|$.

В следующей теореме устанавливается связь между b-гильбертовостью и b^*-бесселевостью пары b-биортогональных систем.

Теорема 1.4.5. *Пусть $\hat{X}$ - рефлексивное CB-пространство, Z-рефлексивно, система $\{y_n\}_{n\in N}$ b-полна в Z, $\{y_n^*\}_{n\in N}$ полна в Z^*. Тогда для того, чтобы $\{y_n\}_{n\in N}$ была $b_{\hat{X}}$-гильбертова в Z необходимо и достаточно, чтобы $\{y_n^*\}_{n\in N}$ была $b^*_{\hat{X}^*}$-бесселевой в Z^*.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{y_n\}_{n\in N}$ является $b_{\hat{X}}$-гильбертовой в Z. Тогда по Теореме 1.4.4 существует оператор $T \in L(\hat{X}, Z)$: $T(\{\delta_{in}x\}_{i\in N}) = b(x, y_n)$, $\forall x \in X$, $n \in N$. Так как $\forall x^* \in X^*$ имеет место $x^* y_n^* \in Z^*$, то

$$b^*(x^* y_n^*, y_k)(x) = x^* y_n^* T\{\delta_{ik}x\}_{i\in N} = \delta_{nk}x^*(x) = \{\delta_{in}x^*\}_{i\in N}(\{\delta_{ik}x\}_{i\in N}),$$

т. е. $T^*(x^* y_n^*) = \{\delta_{in}x^*\}_{i\in N}$. Следовательно, в силу Теоремы 1.4.1 система $\{y_n^*\}_{n\in N}$ - $b^*_{\hat{X}^*}$-бесселева в Z^*.

Достаточность. Пусть система $\{y_n^*\}_{n\in N}$ - $b^*_{\hat{X}^*}$-бесселева в Z^*. Согласно Теореме 1.4.1 $\exists T \in L(Z^*, \hat{X}^*)$: $T(x^* y_n^*) = \{\delta_{in}x^*\}_{i\in N}$, $\forall x^* \in X^*$, $n \in N$. Тогда

$$T(x^* y_n^*)\{\delta_{ik}x\}_{i\in N} = \delta_{nk}x^*(x) = x^* y_n^*(b(x, y_k)).$$

Отсюда из полноты системы $\{y_n^*\}_{n\in N}$ в Z^*, получим $T(f)\{\delta_{ik}x\}_{i\in N} = f(b(x, y_k))$, $f \in Z^*$. Учитывая рефлексивность пространств Z и $\hat{X}$ получим $T^*\{\delta_{ik}x\} = b(x, y_k)$. В силу Теоремы 1.4.4 $\{y_n\}_{n\in N}$ является $b_{\hat{X}}$-гильбертовой в Z. Теорема доказана.

Следующее понятие обобщает понятие базиса Рисса на случай банаховых пространств.

Определение 1.4.3. *b-базис $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ в Z с пространством последовательностей коэффициентов $\hat{X}$ назовем $b_{\hat{X}}$-базисом Рисса в Z.*

Справедлива следующая

Теорема 1.4.6. *Пусть $\hat{X}$ - CB- пространство с каноническим базисом, система $\{y_n\}_{n\in N}$ b-полна в Z, а система $\{y_n^*\}_{n\in N}$ полна в Z^*. Для того, чтобы система $\{y_n\}_{n\in N}$ была $b_{\hat{X}}$-базисом Рисса в H, необходимо и достаточно, чтобы существовал ограниченно обратимый оператор $T \in L(Z, \hat{X})$: $T(b(x, y_n)) = \{\delta_{in}x\}_{i\in N}$, $\forall x \in X$, $n \in N$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{y_n\}_{n\in N}$ является $b_{\hat{X}}$-базисом Рисса в Z. Тогда система $\{y_n\}_{n\in N}$ является одновременно $b_{\hat{X}}$-бесселевой и $b_{\hat{X}}$-гильбертовой в Z. В силу Теорем 1.4.2 и 1.4.4 существуют операторы $T \in L(Z, \hat{X})$ и $S \in L(\hat{X}, Z)$ такие, что $T(b(x, y_n)) = \{\delta_{in}x\}_{i\in N}$ и $S(\{\delta_{in}x\}_{i\in N}) = b(x, y_n)$, $\forall x \in X$, $\forall n \in N$. Следовательно, $(ST)(b(x, y_n)) = b(x, y_n)$ и $TS(\{\delta_{in}x\}_{i\in N}) = \{\delta_{in}x\}_{i\in N}$ Отсюда согласно b-базисности $\{y_n\}_{n\in N}$ получаем $ST(z) = z$, $\forall z \in Z$, а также для $\forall \hat{x} = \{x_n\}_{n\in N} \in \hat{X}$ из разложения $\hat{x} = \sum_{n=1}^{\infty}\{\delta_{in}x_n\}_{i\in N}$ получаем $TS(\hat{x}) = \hat{x}$. Итак, T ограниченно обратим.

Достаточность. Пусть существует ограниченно обратимый оператор $T \in L(Z, \hat{X})$: $T(b(x, y_n)) = \{\delta_{in}x\}_{i\in N}$, $\forall x \in X$, $n \in N$. В силу Теорем 1.4.2 и 1.4.4 система $\{y_n\}_{n\in N}$ одновременно $b_{\hat{X}}$-бесселева и $b_{\hat{X}}$-гильбертова в Z. Остается показать b-базисность в Z системы $\{y_n\}_{n\in N}$. Возьмем $\forall z \in Z$ и обозначим через $Tz = \hat{x}$. Тогда

$$z = T^{-1}\hat{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} T^{-1}(\{\delta_{kn}x_n\}_{k\in N}) = \sum_{n=1}^{+\infty} b(x_n, y_n) .$$

Единственность такого разложения очевидна. Таким образом, $\{y_n\}_{n\in N}$ образует b-базис в Z. Теорема доказана.

Следствие 1.4.5. *Пусть $\hat{X}$ - CB-пространство, система $\{y_n\}_{n\in N}$ b-полна в Z, а система $\{y_n^*\}_{n\in N}$ полна в Z^*. Тогда для того, чтобы система $\{y_n\}_{n\in N}$ была $b_{\hat{X}}$-базисом Рисса в Z, необходимо и достаточно, чтобы существовали числа $A > 0$ и $B > 0$ такие, что для любого конечного $\{x_n\}$ из $\hat{X}$ имело место*

$$A\|\{x_n\}\| \le \left\| \sum_n b(x_n, y_n) \right\| \le B\|\{x_n\}\|.$$

Следствие 1.4.6. *Пусть система $\{y_n\}_{n\in N}$ b-полна в Z, а система $\{y_n^*\}_{n\in N}$ g-полна в Z^*. Тогда, для того чтобы система $\{y_n\}_{n\in N}$ была $b_{\hat{X}_\Phi}$-базисом Рисса в Z, необходимо и достаточно, чтобы оператор $A_{\hat{X}_\Phi} : \hat{X}_\Phi \to \hat{X}_\Phi$ определенный выражением (1.4.3) был ограниченно обратим в $\hat{X}_\Phi$.*

1.5. $\hat{x}$-бесселевость, $\hat{x}$-гильбертовость и $\hat{x}$-Рисс базисность систем в банаховых пространствах

Пусть $\hat{X}$ - CB-пространство. Рассмотрим систему операторов $\{g_k\}_{k\in N} \subset L(Z, X)$. Через $L_{X^*}(\{g_n\}_{n\in N})$ обозначается совокупность всевозможных конечных сумм вида $\sum_k x_k^* g_k$, $x_k^* \in X^*$.

Определение 1.5.1. *Система $\{g_k\}_{k\in N}$ называется g-полной в Z^*, если имеет место равенство $\overline{L_{X^*}(\{g_n\}_{n\in N})} = Z^*$.*

Системы $\{g_k\}_{k\in N} \subset L(Z, X)$ и $\{\Lambda_j\}_{j\in N} \subset L(X, Z)$ называются g-биортогональными, если $g_k \Lambda_j = \delta_{kj} I_X$. При этом система $\{\Lambda_j\}_{j\in N} \subset L(X, Z)$ называется g-биортогональной системой к $\{g_k\}_{k\in N}$.

Система $\{g_k\}_{k\in N}$ *называется* g *-минимальной в* Z^**, если* $\forall x^* \in X^*$ *и* $\forall k \in N$ *имеет место* $x^* g_k \notin \overline{L_{X^*}(\{g_n\}_{n\neq k})}$.

Лемма 1.5.1. g *-минимальная система* $\{g_k\}_{k\in N}$ *минимальна.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть система $\{g_k\}_{k\in N} \subset L(Z,X)$ не минимальна. Тогда $\exists k_0$ такое, что $g_{k_0} \in \overline{L(\{g_n\}_{n\neq k_0})}$. Следовательно,

$$g_{k_0} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1, i\neq k_0}^{m_n} \alpha_i^{m_n} g_i .$$

Отсюда $\forall x^* \in X^*$ получаем

$$x^* g_{k_0} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1, i\neq k_0}^{m_n} \alpha_i^{m_n} x^* g_i ,$$

что означает $x^* g_{k_0} \in \overline{L_{X^*}(\{g_n\}_{n\neq k_0})}$. А это противоречит g -минимальности системы $\{g_k\}_{k\in N}$. Значит система $\{g_k\}_{k\in N}$ минимальна. Лемма доказана.

Следующее понятие является обобщением понятия бесселевости систем.

Определение 1.5.2. *Систему* $\{g_k\}_{k\in N}$ *назовем* $\hat{x}$ *-бесселевой в* Z*, если* $\forall z \in Z$ *выполняется условие* $\{g_k(z)\}_{k\in N} \in \hat{X}$.

Имеет место следующий критерий $\hat{x}$ -бесселевости систем.

Теорема 1.5.1. *Для того чтобы система* $\{g_k\}_{k\in N}$ *была* $\hat{x}$ *-бесселевой в* Z*, необходимо и достаточно, чтобы существовал оператор* $U \in L(Z,\hat{X})$ *такой, что* $\hat{\delta}_n U = g_n$ *для любого* $n \in N$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{g_k\}_{k\in N}$ является $\hat{x}$ -бесселевой в Z. Тогда $\forall z \in Z$ имеем $\{g_k(z)\}_{k\in N} \in \hat{X}$. Определим оператор $U : Z \to \hat{X}$ по формуле

$$U(z) = \{g_k(z)\}_{k\in N}, \ \forall z \in Z . \qquad (1.5.1)$$

Ясно, что для $\forall n \in N$ оператор $U_n : Z \to \hat{X}$, заданный по формуле $U_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \{\delta_{ki} g_k(z)\}_{i\in N}$, $\forall z \in Z$, является линейным и ограниченным и

$U(z) = \lim\limits_{n\to\infty} U_n(z)$. По теореме Банаха-Штейнгауза последовательность $\{U_n\}_{n\in N}$ ограничена, т. е. $\exists B > 0$ такое, что $\|U_n\| \le B$. Следовательно,

$$\|U(z)\| = \lim_{n\to\infty} \|U_n(z)\| \le B\|z\|, \ \forall z \in Z .$$

С другой стороны, $\hat{\delta}_n(U(z)) = g_n(z)$, $\forall z \in Z$, т. е. $\hat{\delta}_n U = g_n$ для $\forall n \in N$.

Достаточность. Пусть существует оператор $U \in L(Z, \hat{X})$ такой, что $\hat{\delta}_n U = g_n$ для любого $n \in N$. Возьмем $\forall z \in Z$ и положим $U(z) = \{x_n\}_{n\in N}$. Тогда из $\hat{\delta}_n U = g_n$ получим $g_n(z) = \hat{\delta}_n(U(z)) = x_n$. Таким образом, $\forall z \in Z$ $\{g_k(z)\}_{k\in N} \in \hat{X}$, т. е. $\{g_k\}_{k\in N}$ является $\hat{x}$-бесселевой в Z. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает

Следствие 1.5.1. *Пусть* $\{g_k\}_{k\in N}$ - $\hat{x}$*-бесселева система в* Z. *Тогда*

$$\exists B > 0: \ \left\|\{g_k(z)\}_{k\in N}\right\| \le B\|z\|, \ \forall z \in Z . \tag{1.5.2}$$

Также имеет место следующий критерий $\hat{x}$-бесселевостис систем.

Теорема 1.5.2. *Для того, чтобы система* $\{g_k\}_{k\in N}$ *была* $\hat{x}$*-бесселевой в* Z, *необходимо, а в случае рефлексивности* $\hat{x}$, *то и достаточно, чтобы* $\exists B > 0$: *для любой конечной* $\{x_k^*\} \subset X^*$ *имело место соотношение*

$$\left\|\sum_k x_k^* g_k\right\| \le B\left\|\{x_k^*\}\right\|. \tag{1.5.3}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть система $\{g_k\}_{k\in N}$ является $\hat{x}$-бесселевой в Z. Возьмем произвольную конечную $\{x_k^*\} \subset X^*$. Учитывая Следствие 1.5.1 получим

$$\left\|\sum_k x_k^* g_k\right\|_{Z^*} = \sup_{\|z\|=1}\left|\sum_k x_k^* g_k(z)\right| =$$

$$= \sup_{\|z\|=1}\left|\{x_k^*\}(\{g_k(z)\}_{k\in N})\right| \le \left\|\{x_k^*\}\right\|_{\hat{X}^*} \sup_{\|z\|=1}\left\|\{g_k(z)\}_{k\in N}\right\| \le B\left\|\{x_k^*\}\right\|_{\tilde{X}^*}.$$

Достаточность. Пусть для любой конечной последовательности $\{x_k^*\} \subset X^*$ выполнено (1.5.3). Возьмем $\forall\{x_k^*\}_{k\in N} \in \hat{X}^*$. В силу рефлексивности $\hat{x}$ по Лемме

1.1.2. имеет место разложение $\hat{x}^* = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(\hat{x}^*)$. Следовательно, $\left\| \sum_{k=n}^{m} P_k(\hat{x}^*) \right\| \to 0$, при $m > n$ и $n \to \infty$. Тогда $\forall z \in Z$ при $m > n$ и $n \to \infty$ используя (1.5.3) получим

$$\left| \sum_{k=n}^{m} x_k^* g_k(z) \right| \le \left\| \sum_{k=n}^{m} x_k^* g_k \right\|_{Z^*} \|z\| \le B \left\| \sum_{k=n}^{m} P_k(\hat{x}^*) \right\|_{\tilde{X}^*} \|z\| \to 0 .$$

Таким образом, $\forall z \in Z$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^* g_k(z)$ и значит $\{g_k(z)\}_{k\in N} \in \hat{X}$, т. е. система $\{g_k\}_{k\in N}$ - $\hat{x}$-бесселева в Z. Теорема доказана.

Следующее определение обобщает понятие гильбертовой системы в гильбертовых пространствах.

Определение 1.5.3. *Систему* $\{g_k\}_{k\in N}$ *назовем* $\hat{x}$*-гильбертовой в* Z*, если* $\forall \{x_k\}_{k\in N} \in \hat{X}$ $\exists z \in Z$ *:* $g_k(z) = x_k$.

Приведем критерий $\hat{x}$-гильбертовости систем.

Теорема 1.5.3. *Для того, чтобы система* $\{g_k\}_{k\in N}$ *была* $\hat{x}$*-гильбертовой в* Z *достаточно, а в случае полноты* $\{g_k\}_{k\in N}$ *и необходимо, чтобы* $\exists T \in L(\hat{X}, Z)$*:* $g_n T = \hat{\delta}_n$, $\forall n \in N$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $\exists T \in L(\hat{X}, Z)$: $g_n T = \hat{\delta}_n$, $\forall n \in N$. Возьмем $\forall \hat{x} = \{x_k\}_{k\in N} \in \hat{X}$. Пусть $T(\hat{x}) = z$. Учитывая равенство $g_n T = \hat{\delta}_n$ получим $g_n(z) = g_n T(\hat{x}) = \hat{\delta}_n(\hat{x}) = x_n$, т. е. $\{g_k\}_{k\in N}$ является $\hat{x}$-гильбертовой в Z.

Необходимость. Пусть $\{g_k\}_{k\in N}$ является полной в Z^* и $\hat{x}$-гильбертовой в Z. Возьмем произвольный $\hat{x} \in \hat{X}$. Из $\hat{x}$-гильбертовости $\{g_k\}_{k\in N}$ в Z следует, что $\exists z \in Z$: $g_n(z) = x_n$. Если существует другой $\exists z_1 \in Z$: $g_n(z_1) = x_n$, то $g_n(z - z_1) = 0$ при $\forall n \in N$. В силу полноты системы $\{g_k\}_{k\in N}$ имеем $f(z - z_1) = 0$, $f \in Z^*$. А это возможно, когда $z = z_1$. Следовательно, можно рассмотреть оператор $T : \hat{X} \to Z$: $T(\hat{x}) = z$. Покажем замкнутость оператора T. Предположим, что

$$\lim_{n\to\infty} \hat{x}_n = \hat{x}, \; T(\hat{x}_n) = z_n \text{ и } \lim_{n\to\infty} T(\hat{x}_n) = z .$$

Тогда существует $z_n \in Z$ удовлетворяющее условию $\{g_k(z_n)\}_{k\in N} = \hat{x}_n$. Пусть $\hat{x}_n = \{x_k^{(n)}\}_{k\in N}$ и $\hat{x} = \{x_k\}_{k\in N}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} g_k(z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$. С другой стороны, из $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} g_k(z_n) = g_k(z)$. Значит $\{g_k(z)\}_{k\in N} = \hat{x}$, т. е. $T(\tilde{x}) = z$, и тем самым оператор T замкнут. По теореме о замкнутом графике T ограничен. Имеем $g_n T(\hat{x}) = g_n(z) = x_n = \hat{\delta}_n(\hat{x})$, $\forall \hat{x} \in \hat{X}$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекают следующие

Следствие 1.5.2. *Пусть система* $\{g_k\}_{k\in N}$ *полна в* Z^* *и* $\hat{x}$ *-гильбертова в* Z. *Тогда* $\exists A > 0$ *такое, что* $\forall z \in Z$: $\{g_k(z)\}_{k\in N} \in \hat{X}$ $\quad A\|z\|_Z \le \left\|\{g_k(z)\}_{k\in N}\right\|_{\hat{X}}$.

Доказательство. Пусть $z \in Z$ такое, что $\{g_k(z)\}_{k\in N} \in \hat{X}$. По Теореме 1.5.3. существует оператор $\exists T \in L(\hat{X}, Z)$ такой, что $T(\{g_k(z)\}_{k\in N}) = z$. Тогда

$$\|z\|_Z = \left\|T(\{g_k(z)\}_{k\in N})\right\|_Z \le \|T\| \left\|\{g_k(z)\}_{k\in N}\right\|_{\hat{X}}.$$

Следовательно, $A \le \dfrac{1}{\|T\|}$ является требуемым числом. Следствие доказано.

Следствие 1.5.3. *Пусть система* $\{g_k\}_{k\in N}$ *полна в* Z^* *и* $\hat{x}$ *-гильбертова в* Z. *Тогда система* $\{g_k\}_{k\in N}$ *минимальна.*

Доказательство. Ясно, что в силу Леммы 1.5.1 достаточно показать g -минимальность $\{g_k\}_{k\in N}$. Предположим противное, т. е. пусть система $\{g_k\}_{k\in N}$ не g -минимальна. Тогда существуют $x^* \in X^*$, $x^* \ne 0$ и $k_0 \in N$ такие, что $x^* g_{k_0} \in \overline{L_{X^*}\left(\{g_n\}_{n\ne k_0}\right)}$. Имеем

$$x^* g_{k_0} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1, k\ne k_0}^{m_n} x_k^{*(m_n)} g_k. \tag{1.5.4}$$

По Теореме 1.5.3 $\exists T \in L(\hat{X}, Z)$: $g_n T = \hat{\delta}_n$. Следовательно, из (1.5.4) получим

$$x^* \hat{\delta}_{k_0} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1, k\ne k_0}^{m_n} x_k^{*(m_n)} \hat{\delta}_k.$$

Отсюда, для $\forall x \in X$ получим $x^*(x) = x^* \hat{\delta}_{k_0}(\{\delta_{nk_0} x\}_{n\in N}) = 0$. Итак, $x^* = 0$. Получили противоречие. Следствие доказано.

В случае рефлексивного пространства имеет место также следующий критерий $\hat{x}$-гильбертовости систем.

Теорема 1.5.4. *Пусть* $\hat{x}$ *- рефлексивное* CB*-пространство и* Z *- рефлексивно. Для того, чтобы система* $\{g_k\}_{k\in N}$ *была* $\hat{x}$*-гильбертовой в* Z*, удовлетворяющая условию*

$$\forall \hat{x} = \{x_k\}_{k\in N} \in \hat{X} \ \exists z \in Z: \ g_k(z) = x_k, \ A\|z\| \le \left\|\{x_k\}_{k\in N}\right\| \tag{1.5.5}$$

необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение

$$A\left\|\{x_k^*\}\right\| \le \left\|\sum_k x_k^* g_k\right\| \tag{1.5.6}$$

для любой конечной последовательности $\{x_k^*\} \subset X^*$*, где* A *- некоторая положительная постоянная.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{g_k\}_{k\in N}$ - $\hat{x}$-гильбертова в Z и выполнено условие (1.5.5). Возьмем произвольную конечную систему $\{x_k^*\} \subset X^*$. В силу рефлексивности $\hat{x}$ существует $\{x_k\}_{k\in N} \in \hat{X}$ такой, что $\left\|\{x_k\}_{k\in N}\right\|_{\hat{X}} = 1$ и $\sum_k x_k^*(x_k) = \left\|\{x_k^*\}\right\|$. Из $\hat{x}$-гильбертовости в Z системы $\{g_k\}_{k\in N}$ существует $z \in Z$: $g_k(z) = x_k$ удовлетворяющее (1.5.5). Тогда

$$\left\|\{x_k^*\}\right\|_{\tilde{X}^*} = \left|\sum_k x_k^*(x_k)\right| = \left|\sum_k x_k^* g_k(z)\right| \le \|z\|_Z \left\|\sum_k x_k^* g_k\right\|_{Z^*} \le \frac{1}{A}\left\|\sum_k x_k^* g_k\right\|_{Z^*}.$$

Достаточность. Пусть $\exists A > 0$ такое, что для любой конечной системы $\{x_k^*\} \subset X^*$ выполнено условие (1.5.6). Возьмем $\forall \{x_k\}_{k\in N} \in \hat{X}$. Определим на $L_{b^*}(\{g_k\}_{k\in N})$ функционал φ по формуле: $\varphi\left(\sum_k x_k^* g_k\right) = \sum_k x_k^*(x_k)$. Согласно неравенству (1.5.6), задание этого функционала корректно. Ясно, что функционал φ линейный. Используя (1.5.6), получим

$$\left|\varphi\left(\sum_k x_k^* g_k\right)\right| = \left|\sum_k x_k^*(x_k)\right| \le \left\|\{x_k^*\}\right\|_{\tilde{X}^*} \left\|\{x_k\}_{k\in N}\right\|_{\tilde{X}} \le \frac{1}{A}\left\|\{x_k\}_{k\in N}\right\|_{\tilde{X}} \left\|\sum_k x_k^* g_k\right\|_{Z^*},$$

т. е. функционал φ ограничен на $L_{b^*}(\{g_k\}_{k\in N})$ и $\|\varphi\| \le \frac{1}{A}\|\{x_k\}_{k\in N}\|_{\tilde{X}}$. По Теореме Хана-Банаха функционал φ непрерывно продолжается на все Z^* с сохранением нормы. Обозначим этот функционал также через φ. Таким образом, $\varphi \in Z^{**}$ и

$$|\varphi(f)| \le \frac{1}{A}\|\{x_k\}_{k\in N}\|_{\hat{X}}\|f\|_{Z^*}\ ,\ f \in Z^*. \tag{1.5.7}$$

В силу рефлексивности $Z\ \exists z \in Z$: $\varphi(f) = f(z)$, $f \in Z^*$ и $\|\varphi\| = \|z\|_Z$. Ясно, что $\forall x^* \in X^*$ имеет место $x^* g_k(z) = \varphi(x^* g_k) = x^*(x_k)$. Отсюда в силу произвольности $x^* \in X^*$ получаем $g_k(z) = x_k$. Следовательно, $\{g_k\}_{k\in N}$ является $\hat{x}$ - гильбертовой в Z. Далее, из (1.5.7) имеем $\|z\|_Z = \|\varphi\| \le \frac{1}{A}\|\{x_k\}_{k\in N}\|_{\tilde{X}}$. Теорема доказана.

Следующая теорема устанавливает связь между $\hat{x}$-бесселевостью и $\hat{x}$-гильбертовостью системы.

Теорема 1.5.5. *Пусть $\hat{x}$ - рефлексивное CB-пространство, Z - рефлексивно. Для того, чтобы система $\{g_k\}_{k\in N}$ была $\hat{x}$-гильбертовой в Z достаточно, а в случае g-полноты $\{g_k\}_{k\in N}$ и необходимо, чтобы выполнялись следующие условия*

1) $\{g_k\}_{k\in N}$ имеет g-биортогональную систему $\{\Lambda_k\}_{k\in N} \subset L(X,Z)$;

2) система $\{\Lambda_k^*\}_{k\in N}$ является $\hat{x}^*$-бесселевой в Z^*.

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнены условия 1) и 2). Возьмем $\forall\{x_k\}_{k\in N} \in \hat{X}$. Из $\hat{X}^*$-бесселевости в Z^* системы $\{\Lambda_k^*\}_{k\in N}$ по Теореме 1.5.1 следует ограниченность оператора $V: Z^* \to \tilde{X}^*$ определенного по формуле $V(f) = \{\Lambda_j^*(f)\}_{j\in N}$. Следовательно,

$$V(f)(\hat{x}) = \sum_{j=1}^{\infty}\Lambda_j^*(f)(x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} f\Lambda_j(x_j),\ f \in Z^*.$$

Таким образом, для $\forall x^* \in X^*$ имеем $V(x^* g_n)(\hat{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} x^* g_n \Lambda_j(x_j) = x^*(x_n)$. С другой стороны, имеем

$$V(x^* g_n)(\hat{x}) = \pi_{\hat{X}}(\hat{x})(V(x^* g_n)) =$$

$$= V^*(\pi_{\hat{X}}(\hat{x}))(x^* g_n) = x^* g_n(\pi_Z^{-1} V^* \pi_{\hat{X}}(\hat{x})) .$$

Значит, из полученных соотношений вытекает, что $x^*(x_n) = x^* g_n(\pi_Z^{-1} V^* \pi_{\hat{X}}(\hat{x}))$. Отсюда в силу произвольности $x^* \in X^*$ получаем $g_n(\pi_Z^{-1} V^* \pi_{\hat{X}}(\hat{x})) = x_n$. Положим $\pi_Z^{-1} V^* \pi_{\hat{X}}(\hat{x}) = z$. Тогда $g_n(z) = x_n$, $\forall n \in N$, т. е. $\{g_k\}_{k\in N}$ есть $\hat{x}$-гильбертова в Z.

Необходимость. Пусть $\{g_k\}_{k\in N}$ g-полна и является $\hat{x}$-гильбертовой системой в Z. По теореме 1.5.3 существует $T \in L(\hat{X}, Z)$ удовлетворяющий условию $g_n T = \hat{\delta}_n$, $\forall n \in N$. Положим $\Lambda_j = T\hat{e}_j$, $j \in N$. Тогда $\forall n, j \in N$ получим

$$g_n \Lambda_j = g_n T\hat{e}_j = \hat{\delta}_n \hat{e}_j = \delta_{nj} I_X ,$$

т. е. $\{g_k\}_{k\in N}$ имеет g-биортогональную систему $\{\Lambda_k\}_{k\in N} \subset L(X, Z)$. Далее, $\forall \hat{x} = \{x_k\}_{k\in N} \in \hat{X}$ имеем $T(\hat{x}) = T(\sum_{j=1}^{\infty} \hat{e}_j(x_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} T\hat{e}_j(x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j(x_j)$. Следовательно,

$$fT(\hat{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} f\Lambda_j(x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j^*(f)(x_j) ,\ \forall f \in Z^* .$$

Таким образом, для $\forall \hat{x} = \{x_k\}_{k\in N} \in \hat{X}$ сходится ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j^*(f)(x_j)$, и значит, $\{\Lambda_j^*(f)\}_{j\in N} \in \hat{X}^*$, т. е. $\{\Lambda_k\}_{k\in N}$ является $\hat{x}^*$-бесселевой в Z^*. Теорема доказана.

Определение 1.5.4. *Система $\{g_k\}_{k\in N}$ называется $\hat{X}^*$-Рисс g-базисом в Z^*, если $\{g_k\}_{k\in N}$ g-полна в Z^* и существуют $A > 0$ и $B > 0$ такие, что*

$$A\left\|\hat{x}^*\right\|_{\hat{X}^*} \le \left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k^* g_k\right\|_{Z^*} \le B\left\|\hat{x}^*\right\|_{\hat{X}^*} ,\ \forall \hat{x}^* \in \hat{X}^* . \tag{1.5.8}$$

A и B называются нижней и верхней границами $\hat{X}^*$-Рисс g-базиса $\{g_k\}_{k\in N}$.

Легко показать, что система $\{g_k\}_{k\in N}$ образует $\hat{X}^*$-Рисс g-базис в Z тогда и только тогда, когда оператор $T : \hat{X}^* \to Z^*$ определенный по формуле

$$T(\hat{x}^*) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^* g_k ,\ \forall \hat{x}^* = \{x_k^*\}_{k\in N} \in \hat{X}^* . \tag{1.5.9}$$

ограничен и ограниченно обратим.

Справедлива следующая

Теорема 1.5.6. *Пусть $\hat{X}$ - рефлексивное CB-пространство, Z - рефлексивно и система $\{g_k\}_{k\in N}$ g-полна в Z^*. Для того, чтобы система $\{g_k\}_{k\in N}$ была $\hat{X}^*$-Рисс g-базисом в Z^* необходимо, и достаточно, чтобы $\{g_k\}_{k\in N}$ одновременно была $\hat{X}$-бесселева и $\hat{X}$-гильбертова в Z.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{g_k\}_{k\in N}$ является $\hat{X}$-Рисс g-базисом в Z^*. Тогда имеет место неравенство (1.5.8). Согласно Теоремам 1.5.2 и 1.5.4 система $\{g_k\}_{k\in N}$ является $\hat{X}$-бесселевой и $\hat{X}$-гильбертовой в Z.

Достаточность. Пусть $\{g_k\}_{k\in N}$ является $\hat{X}$-бесселевой и $\hat{X}$-гильбертовой в Z. Тогда в силу Теорем 1.5.1 и 1.5.3 операторы $U : Z \to \hat{X}$, $U(z) = \{g_k(z)\}_{k\in N}$, $z \in Z$, и $S : \hat{X} \to Z$, $S(\hat{x}) = z$, $\hat{x} = \{g_k(z)\}_{k\in N}$, ограничены. В силу Теоремы 1.5.2 оператор $T : \hat{X}^* \to Z^*$ определенный по формуле (1.5.9) ограничен. Имеем $T = U^*$. На самом деле, $\forall \hat{x}^* \in \hat{X}^*$ получаем

$$\hat{x}^*(U(z)) = \hat{x}^*(\{g_k(z)\}_{k\in N}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* g_n(z) = T(\hat{x}^*)(z),\ z \in Z.$$

С другой стороны очевидно, что $US(\hat{x}) = \hat{x}$, $\hat{x} \in \hat{X}$, и $SU(z) = z$, $z \in Z$. Таким образом, оператор U ограниченно обратим и $U^{-1} = S$. Поэтому оператор T также ограниченно обратим и $T^{-1} = (U^{-1})^* = S^*$, т. е. система $\{g_k\}_{k\in N}$ образует $\hat{X}^*$-Рисс g-базис в Z^*. Теорема доказана.

1.6. О несчетных K-бесселевых и K-гильбертовых системах в несепарабельных банаховых пространствах

Пусть X и Y - несепарабельные банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$ соответственно. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset X$ и $\{x_\alpha^*\}_{\alpha\in I} \subset X^*$ - пара биортогональных систем, I - несчетное множество индексов, I^a - множество не более чем счетных подмножеств I, I_0 - множество конечных подмножеств I и $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ некоторая система в X.

Приведем понятие несчетного безусловного базиса.

Определение 1.6.1. *Система* $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *называется несчетным безусловным базисом в* X*, если*

$$\forall x\in X \quad \exists!\lambda=\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}:\ \{\alpha\in I:\lambda_\alpha\neq 0\}\in I^a \quad x=\sum_{\alpha\in I}\lambda_\alpha\varphi_\alpha \text{ (безусловно).}$$

Имеет место следующий критерий несчетного безусловного базиса в несепарабельных банаховых пространствах.

Теорема 1.6.1. *Для того, чтобы система* $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *была несчетным безусловным базисом в* X *необходимо и достаточно выполнение условий:*

1) система $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *полна в* X*;*

2) система $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *минимальна в* X*;*

3) $\exists M>0$*:* $\forall J\in I_0$, $\forall x\in X$ $\left\|\sum_{\alpha\in J}\varphi_\alpha^*(x)\varphi_\alpha\right\|_X\le M\|x\|_X$,

где $\{\varphi_\alpha^*\}_{\alpha\in I}$ *- биортогональная система к* $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ образует несчетный безусловный базис в X. Тогда очевидно, что $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ полна в X. Через K_φ обозначим множество систем скаляров $\lambda=\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}$ таких, что $\{\alpha\in I:\lambda_\alpha\neq 0\}\in I^a$ и ряд $\sum_{\alpha\in I}\lambda_\alpha\varphi_\alpha$ сходится безусловно. Ясно, что K_φ становится линейным нормированным пространством с линейными операциями: $\forall\lambda=\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}$, $\mu=\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in I}\in K_\varphi$, $\forall k$: $\lambda+\mu=\{\lambda_\alpha+\mu_\alpha\}_{\alpha\in I}$, $k\lambda=\{k\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}$ с нормой

$$\|\lambda\|_{K_\varphi}=\sup_{J\in I_0}\left\|\sum_{\alpha\in J}\lambda_\alpha\varphi_\alpha\right\|_X,\ \lambda=\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}\in K.$$

Установим полноту пространства K_φ. Пусть $\lambda_n=\{\lambda_\alpha^{(n)}\}_{\alpha\in I}$, $n\in N$ - некоторая фундаментальная последовательность в K_φ. Тогда

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\ \forall n,m\ge n_0(\varepsilon)\ \|\lambda_n-\lambda_m\|_{K_\varphi}=\sup_{J\in I_0}\left\|\sum_{\alpha\in J}(\lambda_\alpha^{(n)}-\lambda_\alpha^{(m)})\varphi_\alpha\right\|_X<\varepsilon. \qquad (1.6.1)$$

Из (1.6.1) получаем, что

$$\forall J \in I_0 \quad \left\| \sum_{\alpha \in J} (\lambda_\alpha^{(n)} - \lambda_\alpha^{(m)}) \varphi_\alpha \right\|_X < \varepsilon \,. \tag{1.6.2}$$

В частности, $\forall \alpha \in I \quad \left| \lambda_\alpha^{(n)} - \lambda_\alpha^{(m)} \right| < \dfrac{\varepsilon}{\|\varphi_\alpha\|_X}$. Поэтому $\forall \alpha \in I$ последовательность $\left\{\lambda_\alpha^{(n)}\right\}_{n \in N}$ фундаментальна, и значит сходится. Пусть $\lambda_\alpha = \lim_{n \to \infty} \lambda_\alpha^{(n)}$. Положим $A_n = \left\{\alpha \in I : \lambda_\alpha^{(n)} \neq 0\right\}$ и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда из $I \setminus A = \bigcap_{n=1}^{\infty} (I \setminus A_n)$ получаем, что $I \setminus A \subset \{\alpha \in I : \lambda_\alpha = 0\}$, т. е. $\{\alpha \in I : \lambda_\alpha \neq 0\} \subset A$ и поэтому $\{\alpha \in I : \lambda_\alpha \neq 0\} \in I^a$. Переходя в (1.6.2) к пределу при $m \to \infty$ получим

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0(\varepsilon) \;\; \forall n \geq n_0(\varepsilon) \left\| \sum_{\alpha \in J} (\lambda_\alpha^{(n)} - \lambda_\alpha) \varphi_\alpha \right\|_X \leq \varepsilon \,, \; \forall J \in I_0 \,. \tag{1.6.3}$$

Пусть $\{\lambda_{\alpha_i}\}_{i \in N}$ - любая перестановка элементов системы $\lambda = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Покажем сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{\alpha_i} \varphi_{\alpha_i}$. Возьмем $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall k, p \in N$. Согласно (1.6.3) $\exists n_0(\varepsilon)$ $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$:

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{\alpha_i}^{(n)} - \lambda_{\alpha_i}) \varphi_{\alpha_i} \right\|_X \leq \frac{\varepsilon}{4} \text{ и } \left\| \sum_{i=1}^{k+p} (\lambda_{\alpha_i}^{(n)} - \lambda_{\alpha_i}) \varphi_{\alpha_i} \right\|_X \leq \frac{\varepsilon}{4} \,. \tag{1.6.4}$$

Пусть $n \geq n_0(\varepsilon)$ - фиксированное число. Из сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{\alpha_i}^{(n)} \varphi_{\alpha_i}$ получаем, что $\exists k_0(\varepsilon) \;\; \forall k \geq k_0(\varepsilon)$ имеет место

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_{\alpha_i}^{(n)} \varphi_{\alpha_i} - \sum_{i=1}^{k+p} \lambda_{\alpha_i}^{(n)} \varphi_{\alpha_i} \right\|_X < \frac{\varepsilon}{2} . \tag{1.6.5}$$

Тогда, учитывая (1.6.4) и (1.6.5) получим

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_{\alpha_i} \varphi_{\alpha_i} - \sum_{i=1}^{k+p} \lambda_{\alpha_i} \varphi_{\alpha_i} \right\|_X \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_{\alpha_i} \varphi_{\alpha_i} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_{\alpha_i}^{(n)} \varphi_{\alpha_i} \right\|_X + \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_{\alpha_i}^{(n)} \varphi_{\alpha_i} - \sum_{i=1}^{k+p} \lambda_{\alpha_i}^{(n)} \varphi_{\alpha_i} \right\|_X + \left\| \sum_{i=1}^{k+p} \lambda_{\alpha_i} \varphi_{\alpha_i} - \sum_{i=1}^{k+p} \lambda_{\alpha_i}^{(n)} \varphi_{\alpha_i} \right\|_X < \varepsilon \,,$$

и поэтому ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{\alpha_i} \varphi_{\alpha_i}$ сходится. Таким образом, ряд $\sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha \varphi_\alpha$ сходится безусловно. Далее, согласно (1.6.3) имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0(\varepsilon) \;\; \forall n \geq n_0(\varepsilon) \;\; \|\lambda_n - \lambda\|_{K_\varphi} = \sup_{J \in I_0} \left\| \sum_{\alpha \in J} (\lambda_\alpha^{(n)} - \lambda_\alpha)\varphi_\alpha \right\|_X \leq \varepsilon,$$

т. е λ_n сходится в пространстве K_φ к элементу λ. Поэтому K_φ полно.

Рассмотрим оператор $F : K_\varphi \to X$ по формуле $F\lambda = x$, $\lambda = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in I}$, где $x = \sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha \varphi_\alpha$. Оператор F является линейным ограниченным оператором. Действительно, линейность оператора F очевидна, а ограниченность следует из соотношения

$$\|F\lambda\|_X = \left\| \sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha \varphi_\alpha \right\|_X \leq \sup_{J \in I_0} \left\| \sum_{\alpha \in J} \lambda_\alpha \varphi_\alpha \right\|_X = \|\lambda\|_{K_\varphi}.$$

Далее, поскольку оператор F отображает K_φ взаимно однозначно на X, по теореме Банаха оператор F^{-1} ограничен.

Теперь установим минимальность системы $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$. $\forall \alpha \in I$ определим функционал $\varphi_\alpha^*(x) = \lambda_\alpha$, где $\lambda = F^{-1}x$. Легко видеть, что такой функционал линеен. Покажем его ограниченность. Имеем

$$|\varphi_\alpha^*(x)| = |\lambda_\alpha| = \frac{\|\lambda_\alpha \varphi_\alpha\|_X}{\|\varphi_\alpha\|_X} \leq \frac{1}{\|\varphi_\alpha\|_X} \sup_{J \in I_0} \left\| \sum_{\beta \in J} \lambda_\beta \varphi_\beta \right\|_X = \frac{1}{\|\varphi_\alpha\|} \|\lambda\|_{K_\varphi} \leq \frac{\|F^{-1}\|}{\|\varphi_\alpha\|_X} \|x\|_X,$$

т. е. $\|\varphi_\alpha^*\| \leq \dfrac{\|F^{-1}\|}{\|\varphi_\alpha\|_X}$. С другой стороны, $\varphi_\alpha^*(\varphi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$. Таким образом, системы $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ и $\{\varphi_\alpha^*\}_{\alpha \in I}$ биортогональны.

Наконец, $\forall x \in X$ и $\forall J \in I_0$ имеем

$$\left\| \sum_{\alpha \in J} \varphi_\alpha^*(x) \varphi_\alpha \right\|_X \leq \sup_{F \in I_0} \left\| \sum_{\alpha \in F} \varphi_\alpha^*(x) \varphi_\alpha \right\| = \|F^{-1}x\| \leq \|F^{-1}\| \|x\|_X,$$

т. е. имеет место 3). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнены условия 1) - 3). Возьмем $\forall x \in X$. В силу полноты системы $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ в X имеем $\forall \varepsilon > 0$ $\exists y \in L(\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I})$: $\|x - y\|_X < \varepsilon$. Тогда

$$\forall n \in N \; \exists y_n \in L(\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}) : \|x - y_n\|_X < \frac{1}{n}. \tag{1.6.6}$$

Пусть $J_n \in I_0$: $y_n = \sum_{\alpha\in J_n} \lambda_\alpha \varphi_\alpha = \sum_{\alpha\in J_n} \varphi_\alpha^*(y_n)\varphi_\alpha$. Обозначим через $\omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$. Ясно, что $\omega \in I^a$. Возьмем произвольный $\varepsilon > 0$. Пусть $n_0 \in N$: $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Для $\forall J \subset \omega$: $J_{n_0} \subset J$ имеем

$$y_{n_0} = \sum_{\alpha\in J_{n_0}} \varphi_\alpha^*(y_n)\varphi_\alpha = \sum_{\alpha\in J} \varphi_\alpha^*(y_{n_0})\varphi_\alpha. \tag{1.6.7}$$

Тогда, используя (1.6.6), (1.6.7) и условие 3) $\forall J \subset \omega$: $J_{n_0} \subset J$ получим

$$\left\| x - \sum_{\alpha\in J} \varphi_\alpha^*(x)\varphi_\alpha \right\|_X = \left\| x - y_{n_0} + y_{n_0} - \sum_{\alpha\in J} \varphi_\alpha^*(x)\varphi_\alpha \right\|_X \le$$

$$\le \left\| x - y_{n_0} \right\|_X + \left\| \sum_{\alpha\in J} \varphi_\alpha^*(x - y_{n_0})\varphi_\alpha \right\|_X \le \left\| x - y_{n_0} \right\|_X + M\left\| x - y_{n_0} \right\|_X =$$

$$= (1+M)\left\| x - y_{n_0} \right\|_X < (1+M)\varepsilon.$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists J_0 \subset \omega \;\; \forall J \subset \omega: \; J_0 \subset J \quad \left\| x - \sum_{\alpha\in J} \varphi_\alpha^*(x)\varphi_\alpha \right\|_X < \varepsilon,$$

и поэтому, согласно критерию безусловной сходимости рядов ряд $\sum_{\alpha\in\omega} \varphi_\alpha^*(x)\varphi_\alpha$ безусловно сходится к $x \in X$. Ясно, что из минимальности системы $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\omega}$ такое представление единственно, т. е. система $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ образует несчетный безусловный базис в X. Теорема доказана.

Пример 1.6.1. Пусть $l_p(I)$, $1 \le p < +\infty$, - множество систем скаляров $\lambda = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}$ таких, что $\omega_\lambda = \{\alpha \in I : \lambda_\alpha \neq 0\} \in I^a$ и удовлетворяющих условию $\sum_{\alpha\in\omega_\lambda} |\lambda_\alpha|^p < +\infty$. $l_p(I)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|\lambda\| = \left(\sum_{\alpha\in\omega_\lambda} |\lambda_\alpha|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \; \lambda = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I} \in l_p(I).$$

Пусть $\delta_{\alpha\beta}$ - символ Кренекера и $\delta_\alpha = \{\delta_{\alpha\beta}\}_{\beta\in I}$. Система $\{\delta_\alpha\}_{\alpha\in I}$ является несчетным безусловным базисом в $l_p(I)$. Действительно, несложно показать, что для $\forall\lambda=\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}\in l_p(I)$ справедливо единственное представление в виде безусловно сходящегося ряда $\lambda=\sum_{\alpha\in\omega_\lambda}\lambda_\alpha\delta_\alpha$.

Пусть K - некоторое несепарабельное банахово пространство систем $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}$ из скаляров.

Следующие понятия являются несчетными обобщениями пары биортогональных бесселевых и гильбертовых последовательностей в банаховых пространствах.

Определение 1.6.2. *Систему $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ назовем несчетным K-бесселевым в X, если для $\forall x\in X$ имеет место включение $\{x_\alpha^*(x)\}_{\alpha\in I}\in K$. Систему $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ назовем несчетным K-гильбертовым в X, если для $\forall\lambda=\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}\in K$ существует $x\in X$: $\lambda=\{x_\alpha^*(x)\}_{\alpha\in I}$.*

Пусть K - CB-пространство с несчетным безусловным базисом $\{\delta_\alpha\}_{\alpha\in I}$. В следующей теореме приводится критерий несчетной K-бесселевости систем.

Теорема 1.6.2. *Для того, чтобы система $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ была несчетным K-бесселевым в X необходимо, а в случае полноты $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ в X, то и достаточно существование оператора $T\in L(X,K)$ такой, что $Tx_\alpha=\delta_\alpha$, $\forall\alpha\in I$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ - несчетная K-бесселева в X. Тогда $\forall x\in X$ $\{x_\alpha^*(x)\}_{\alpha\in I}\in K$. Рассмотрим оператор $T:X\to K$ по формуле

$$T(x)=\sum_{\alpha\in I}x_\alpha^*(x)\delta_\alpha. \tag{1.6.8}$$

Ясно, что $Tx_\alpha=\delta_\alpha$, $\forall\alpha\in I$. Определим для любого $\omega\in I^a$ оператор

$$T_\omega(x)=\sum_{\alpha\in\omega}x_\alpha^*(x)\delta_\alpha.$$

Имеет место $T_\omega\in L(X,K)$ ([14], стр.5). Возьмем $\forall x\in X$. Запишем элементы множества $I_x=\{\alpha:x_\alpha^*(x)\neq 0\}$ в виде последовательности $\{\alpha_n\}_{n\in N}$. Для каждого $\omega\in I^a$ положим $\omega\cap I_x=\{\alpha_{n_k}\}_{k\in N}$. Имеем

$$T_\omega(x)=\sum_{k=1}^{\infty}x^*_{\alpha_{n_k}}(x)\delta_{\alpha_{n_k}}.$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{\infty}x^*_{\alpha_{n_k}}(x)\delta_{\alpha_{n_k}}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^*_{\alpha_n}(x)\delta_{\alpha_n}+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n x^*_{\alpha_n}(x)\delta_n\right),\ \varepsilon_n=\begin{cases}1, & n=n_k,k\in N\\ -1, & n\neq n_k,k\in N\end{cases},$$

имеем $\|T_\omega(x)\|_K\le M_x<+\infty$. Тогда по теореме Банаха-Штейнгауза получим $\sup\limits_{\omega\in I^a}\|T_\omega\|<+\infty$. Поэтому оператор T ограничен.

Достаточность. Пусть система $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ полна в X и существует $T\in L(X,K)$ такой, что $Tx_\alpha=\delta_\alpha$, $\forall\alpha\in I$. Возьмем $\forall x\in X$. Поскольку $Tx\in K$, получим $\{\delta^*_\alpha(Tx)\}_{\alpha\in I}\in K$. Имеем

$$\delta_{\alpha\beta}=\delta^*_\alpha(\delta_\beta)=\delta^*_\alpha(Tx_\beta)=T^*\delta^*_\alpha(x_\beta).$$

Отсюда, в силу полноты $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$, получаем $T^*\delta^*_\alpha=x^*_\alpha$. Из этого равенства следует, что для $\forall x\in X$ $\{x^*_\alpha(x)\}_{\alpha\in I}=\{\delta^*_\alpha(Tx)\}\in K$. Теорема доказана.

Следствие 1.6.1. *Пусть Y - имеет несчетный безусловный базис $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ с пространством систем коэффициентов K_φ. Для того, чтобы $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ была несчетной K_φ-бесселевой в X необходимо, а в случае полноты $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ в X, то и достаточно, чтобы $\exists T\in L(X,Y)$ такой, что $Tx_\alpha=\varphi_\alpha$, $\forall\alpha\in I$.*

Следствие 1.6.2. *Пусть система $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}\subset X$ полна в X. Система $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ является несчетной K-бесселевой в X тогда и только тогда, когда существует число $M>0$:*

$$\|\{\lambda_\alpha\}\|_K\le M\left\|\sum_\alpha\lambda_\alpha x_\alpha\right\|_X,$$

для любого конечного набора скаляров $\{\lambda_\alpha\}$.

Сформулируем критерий несчетной K-гильбертовости систем.

Теорема 1.6.3. *Для того, чтобы система $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$* была несчетной K-*гильбертовой в X достаточно, а в случае полноты $\{x^*_\alpha\}_{\alpha\in I}$ в X^*, то и необходимо, чтобы $\exists T\in L(K,X)$ такой, что $T\delta_\alpha=x_\alpha$, $\forall\alpha\in I$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ - несчетная K-гильбертовая в X и система $\{x_\alpha^*\}_{\alpha\in I}$ полна в X^*. Тогда $\forall\lambda=\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}\in K$ $\exists x\in X$ такой, что $\lambda=\{x_\alpha^*(x)\}_{\alpha\in I}$. В силу полноты $\{x_\alpha^*\}_{\alpha\in I}$ в X^*, такой элемент единственный. Рассмотрим оператор $T:K\to X$ по формуле $T\lambda=x$. Ясно, что $T\delta_\alpha=x_\alpha$, $\forall\alpha\in I$. Остается показать ограниченность оператора T. Пусть последовательность $\lambda_n=\{\lambda_\alpha^{(n)}\}_{\alpha\in I}\in K$ сходится в K при $n\to\infty$ к $\lambda=\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}\in K$, а последовательность $T\lambda_n=x_n$ сходится в X при $n\to\infty$ к $y\in X$ и пусть $T\lambda=x$. Ясно, что $x_\alpha^*(x_n)$ сходится при $n\to\infty$ к $x_\alpha^*(y)$. $\forall\alpha\in I$ имеем

$$\left|\lambda_\alpha^{(n)}-\lambda_\alpha\right|=\left|\delta_\alpha^*(\lambda_n-\lambda)\right|\le\left\|\delta_\alpha^*\right\|\left\|\lambda_n-\lambda\right\|_K\to 0,\ n\to\infty.$$

Так как $\lambda_\alpha^{(n)}=x_\alpha^*(x_n)$ и $\lambda_\alpha=x_\alpha^*(x)$, следовательно $x_\alpha^*(x)=x_\alpha^*(y)$. Отсюда в силу полноты $\{x_\alpha^*\}_{\alpha\in I}$ получим $x=y$, и значит $T\lambda_n$ сходится в X при $n\to\infty$ к $T\lambda$. По теореме о замкнутом графике оператор T ограничен.

Достаточность. Пусть существует оператор $T\in L(K,X)$ такой, что $T\delta_\alpha=x_\alpha$, $\forall\alpha\in I$. Возьмем произвольный $\lambda=\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}\in K$. Положим $T\lambda=x$. Из $\lambda=\sum_{\alpha\in I}\lambda_\alpha\delta_\alpha$ получим $x=T\lambda=\sum_{\alpha\in I}\lambda_\alpha T\delta_\alpha=\sum_{\alpha\in I}\lambda_\alpha x_\alpha$. Поэтому $x_\alpha^*(x)=\lambda_\alpha$, т. е. $\lambda=\{x_\alpha^*(x)\}_{\alpha\in I}$. Теорема доказана.

Следствие 1.6.3. *Пусть Y - имеет несчетный безусловный базис $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ с пространством систем коэффициентов K_φ. Для того, чтобы $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ была несчетной K_φ-гильбертовой в X достаточно, а в случае полноты $\{x_\alpha^*\}_{\alpha\in I}$ в X^*, то и необходимо, чтобы $\exists T\in L(Y,X)$ такой, что $T\varphi_\alpha=x_\alpha$, $\forall\alpha\in I$.*

Следствие 1.6.4. *Пусть система $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}\subset X$ полна в X. Тогда для того, чтобы система $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ была несчетной K-гильбертовой в X достаточно, а в случае полноты $\{x_\alpha^*\}_{\alpha\in I}$ в X^*, то и необходимо выполнение условия:*

$$\exists M>0:\ \left\|\sum_\alpha\lambda_\alpha x_\alpha\right\|_X\le M\left\|\{\lambda_\alpha\}\right\|_K,$$

для любого конечного набора скаляров $\{\lambda_\alpha\}$.

Пример 1.6.2. Пусть $e_\alpha(t)=e^{i\alpha t}$, $t\in R$. Положим $V=span\{e_\alpha\}_{\alpha\in R}$. Очевидно, что $\forall x\in V\ \exists M_x:\ |x(t)|\le M_x$. Поэтому $\forall p\in[1,+\infty)$ существует $\overline{\lim\limits_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}|x(t)|^p\,dt$. Легко показать, что $\|x\|_{V_p}=\overline{\lim\limits_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}|x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$ является нормой в V. Полученное нормированное пространство обозначим через V_p. В пространстве V_2 определяется скалярное произведение следующим образом:

$$(x,y)_V=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}x(t)\overline{y(t)}dt\,.$$

Система $\{e_\alpha\}_{\alpha\in R}$ является ортонормированной в V_2. Обозначим через $L_p^V(R)$, $1\le p<+\infty$, пополнение пространства V_p. Используя неравенство Гельдера несложно показать, что $L_p^V(R)\subset L_2^V(R)$ при $p>2$ и $L_2^V(R)\subset L_p^V(R)$ при $p<2$. Пространство $L_p^V(R)$ несепарабельно. Очевидно, что для ее установления достаточно показать несепарабельность пространства V_p.

Пусть $M=\{e_\alpha\}_{\alpha\in R}$. Оценим для различных $\forall e_\alpha,e_\beta\in M$ число $\|e_\alpha-e_\beta\|_{V_1}$. В силу ортонормированности системы $\{e_\alpha\}_{\alpha\in R}$ имеем $\|e_\alpha-e_\beta\|_{V_2}^2=\|e_\alpha\|_{V_2}^2+\|e_\beta\|_{V_2}^2=2$. Поэтому

$$2=\|e_\alpha-e_\beta\|_{V_2}^2=\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\left|e^{i\alpha t}-e^{i\beta t}\right|^2dt\le$$

$$\le\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\left|e^{i\alpha t}-e^{i\beta t}\right|\left(\left|e^{i\alpha t}\right|+\left|e^{i\beta t}\right|\right)dt=2\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\left|e^{i\alpha t}-e^{i\beta t}\right|dt=2\|e_\alpha-e_\beta\|_{V_1},$$

т. е. $\|e_\alpha-e_\beta\|_{V_1}\ge1$. Следовательно, V_1 - несепарабельно. Теперь рассмотрим пространство V_p при $p>1$. Предположим, противное, т. е. пусть V_p сеперабельно и M счетное всюду плотное множество в V_p. Тогда $\forall x\in V\quad\exists x_n\in M$: $\lim\limits_{n\to\infty}\|x-x_n\|_{V_p}=0$. Поскольку $\forall x\in V$

$$\|x\|_{V_1}=\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}|x(t)|dt\le\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}|x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}=\|x\|_{V_p},$$

получаем $\lim_{n\to\infty}\|x-x_n\|_{V_1}=0$. Следовательно, M счетное всюду плотное множество в V_1. Что противоречит несепарабельности V_1. Значит пространство V_p несепарабельно.

Определим в V_p функционал по равенству

$$e_\alpha^*(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)e^{-i\alpha t}dt.$$

Линейность e_α^* очевидна. Имеем

$$\left|e_\alpha^*(x)\right|\le\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|dt\le\overline{\lim_{T\to\infty}}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Продолжив по непрерывности e_α^* на $L_p^V(R)$ получаем $e_\alpha^*\in(L_p^V(R))^*$. Ясно, что $e_\alpha^*(e_\beta)=\delta_{\alpha\beta}$, т. е. системы $\{e_\alpha\}_{\alpha\in R}$ и $\{e_\alpha^*\}_{\alpha\in R}$ биортогональны.

Система $\{e_\alpha\}_{\alpha\in R}$ при $p\ge 2$ является несчетной $l_p(R)$-бесселевой в $L_p^V(R)$. Действительно, Поскольку $x\in L_2^V(R)$, из неравенства бесселя следует, что не более чем счетное число коэффициентов Фурье $e_\alpha^*(x)=(x,e_\alpha)_V$ отлично от нуля и $\{e_\alpha^*(x)\}_{\alpha\in R}\in l_2(R)$ и для любого конечного набора скаляров $\{\lambda_\alpha\}$ имеем

$$\left\|\sum_\alpha\lambda_\alpha e_\alpha\right\|_{V_p}\ge\left\|\sum_\alpha\lambda_\alpha e_\alpha\right\|_{V_2}=\|\{\lambda_\alpha\}\|_{l_2(R)}\ge M_1\|\{\lambda_\alpha\}\|_{l_p(R)}.$$

Система $\{e_\alpha\}_{\alpha\in R}$ при $p\le 2$ является несчетной $l_p(R)$-гильбертовой в $L_p^V(R)$. Действительно, $\forall\lambda=\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in R}\in l_p(R)$ очевидно, что $\lambda\in l_2(R)$. Поскольку $\{e_\alpha\}_{\alpha\in R}$ ортонормированная система в $L_2^V(R)$, то существует $x\in L_2^V(R)$ такой, что $e_\alpha^*(x)=(x,e_\alpha)_V=\lambda_\alpha$. С другой стороны, для любого конечного набора скаляров $\{\lambda_\alpha\}$ имеем

$$\left\|\sum_\alpha\lambda_\alpha e_\alpha\right\|_{V_p}\le\left\|\sum_\alpha\lambda_\alpha e_\alpha\right\|_{V_2}=\|\{\lambda_\alpha\}\|_{l_2(R)}\le M_2\|\{\lambda_\alpha\}\|_{l_p(R)}.$$

ГЛАВА II.
b-ИЗОМОРФНЫЕ b-БАЗИСЫ

Одним из методов установления базисных свойств систем в банаховых пространствах является использование методов теории близких базисов. Базисы считаются изоморфными или эквивалентными, если существует ограниченно обратимый оператор, преобразующий один базис в другой. В работе Н.К.Бари [5] введено понятие квадратично близких систем и устанавливается, что минимальная система, квадратично близкая к базису Рисса является базисом Рисса. В пространстве $L_2(-\pi,\pi)$ о базисности возмущенной системы экспонент, известна теорема Пэли-Винера, согласно которой при условии $\sup\limits_n|\lambda_n - n| < \frac{1}{\pi^2}$ система $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in Z}$ образует базис изоморфный классической системе экспонент. Этот факт М.Кадецом устанавливается при условии $\sup\limits_n|\lambda_n - n| < \frac{1}{4}$ и известна как теорема $\frac{1}{4}$-Кадеца. Аналоги теоремы $\frac{1}{4}$-Кадеца на языке мультипликаторов в пространстве $L_p(-\pi,\pi)$ и для систем синусов и косинусов в $L_2(0,\pi)$ были получены Б.Т.Билаловым [8, 10]. Подобные результаты были изучены в работах X.He, H.Volkmer [148], M.Horvath [153], Y.I.Lyubarskii, S.Kristian [191], R.M.Young [220] и др. Следует отметить, что в банаховых пространствах относительно изоморфных базисов известны теорема Пэли-Винера, Крейна-Рутмана-Мильмана, теорема Birkhof-Rota. В работе Б.Т.Билалова [8] изучалась изоморфная базисность системы, полученной при возмущении базиса фредгольмовым оператором, а также изоморфная базисность системы p-близкой к q-базису в банаховых пространствах. В этой главе получены аналоги некоторых теорем теории близких базисов, в частности, аналоги теорем Пэли-Винера в гильбертовых и банаховых пространствах в контексте b-базисов. Дается понятие $\hat{X}$-бесселевого b-базиса, обобщающее бесселевый базис, и доказываются теоремы об его устойчивости.

2.1. Об b-изоморфных b-базисах в банаховых пространствах

Пусть X, Y, Y_1, Z и Z_1 - банаховы пространства, $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ и $\{y_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z,X)$ - некоторые системы, $b: X\times Y \to Z$, $b_1: X\times Y_1 \to Z_1$ − билинейные отображения удовлетворяющие условию (1.1.1).

Определение 2.1.1. *Системы $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ и $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y_1$ назовем b-изоморфными, если существует ограниченно обратимый оператор $T: Z \to Z_1$ такой, что $T(b(x,\varphi_n)) = b_1(x,\psi_n)$ при любых $x\in X$ и $n \in N$.*

Следующее утверждение является обобщением теоремы Мильмана.

Теорема 2.1.1. *Пусть $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ образует b-базис в Z, последовательность $\{\varepsilon_n > 0\}_{n\in N}$ чисел такая, что*

$$q = \sup_{n,\|x_k^*\|\le M} \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k^* \varphi_k^* \right\| < 1, \tag{2.1.1}$$

где $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$ - b-сопряженная система к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$. Пусть система $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$ такая, что $\|\varphi_n - \psi_n\|_Y \le \varepsilon_n$ при всех $n\in N$. Тогда $\{\psi_n\}_{n\in N}$ является b-изоморфной к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.

Доказательство. Рассмотрим на $L_b(\{\varphi_n\}_{n\in N})$ линейный оператор T соотношением $T(b(x,\varphi_n)) = b(x,\psi_n)$ при любых $x\in X$ и $n\in N$. Возьмем произвольный $f \in Z^*$ такой, что $\|f\| = 1$. Тогда

$$\|b^*(f,\varphi_n - \psi_n)\| \le M\|\varphi_n - \psi_n\|_Y \le M\varepsilon_n,\ n\in N.$$

Поэтому

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} b^*(f,\varphi_k - \psi_k)\varphi_k^* \right\| \le \sup_{n,\|x_k^*\|\le M} \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k^* \varphi_k^* \right\| = q.$$

Следовательно, для любого $z\in Z$ имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} b(\varphi_k^*(z), \varphi_k - \psi_k) \right\| \le \sup_{\|f\|=1} \left| \sum_{k=1}^{n} b^*(f,\varphi_k - \psi_k)\varphi_k^*(z) \right| \le q\|z\|_Z. \tag{2.1.2}$$

Очевидно, что $(I-T)(\sum_{k=1}^{n} b(x_k,\varphi_k)) = \sum_{k=1}^{n} b(x_k,\varphi_k-\psi_k)$. Поэтому, с учетом (2.1.2), в силу b-базисности $\{\varphi_n\}_{n\in N}$, получаем $\|(I-T)(z)\|_Z \le q\|z\|_Z$, $z \in L_b(\{\varphi_n\}_{n\in N})$. Продолжая непрерывно оператор $I-T$, учитывая (2.1.1), получим $\|I-T\|<1$. Таким образом, оператор T ограниченно обратим. Теорема доказана.

В следующей теореме приводятся эквивалентные условия b-изоморфности к b-базису при фредгольмовом возмущении.

Теорема 2.1.2. *Пусть система $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ образует b-базис в Z, $F \in L(Z)$ - фредгольмовый оператор, система $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$ такая, что $F(b(x,\varphi_n)) = b(x,\psi_n)$, $\forall x \in X$, $n \in N$. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

a) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ - b-полна в Z;

b) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ - b-минимальна в Z;

c) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ - ω- b-линейно независима в Z;

d) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ образует b-базис в Z, b-изоморфный к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.

Доказательство. Ясно, что для доказательства леммы достаточно показать ограниченную обратимость оператора F, при выполнении каждого из условий a) - d). Пусть система $\{\psi_n\}_{n\in N}$ b-полна в Z. Если $\psi^* \in \ker F^*$, то $\forall x \in X$ и $n \in N$ будем иметь

$$\psi^*(b(x,\psi_n)) = \psi^*(F(b(x,\varphi_n))) = F^*\psi^*(b(x,\varphi_n)) = 0.$$

В силу b-полноты $\{\psi_n\}_{n\in N}$, из последнего соотношения следует, что $\psi^*=0$, т. е. $\ker F^* = \{0\}$. Таким образом $\operatorname{Im} F = Z$. С другой стороны, согласно фредгольмовости оператора F получаем $\ker F = \{0\}$. Следовательно, по теореме Банаха, оператор F ограниченно обратим.

Пусть теперь $\{\psi_n\}_{n\in N}$ - b-минимальна в Z. Возьмем $z \in \ker F$, т. е. $Fz=0$. Тогда из b-базисности $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ в Z, следует, что $z = \sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z),\varphi_n)$, где $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$ является b-биортогональной системой к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$. Действуя на обе части последнего равенства оператором F получаем $\sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z),\psi_n) = 0$. Согласно b-

минимальности системы $\{\psi_n\}_{n\in N}$ получаем, что это верно только при $\varphi_n^*(z)=0$. Поэтому $z=0$. Значит, оператор F ограниченно обратим.

Аналогичным образом показывается ограниченная обратимость F в случаях c) и d). Теорема доказана.

Также имеет место следующая

Теорема 2.1.3. *Пусть система* $\{\varphi_n\}_{n\in N}\subset Y$ *образует* b*-базис в* Z, $F\in L(Z)$ *- фредгольмовый оператор, система* $\{\psi_n\}_{n\in N}\subset Y$ *такая, что* $F(b(x,\psi_n))=b(x,\varphi_n)\ \forall x\in X$, $n\in N$. *Тогда* $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *образует* b*-базис в* Z, b*-изоморфный к* $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.

Доказательство. Покажем ограниченную обратимость оператора F. Пусть $\psi^*\in\ker F^*$. В силу того, что $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ b-базис в Z, то

$$\psi^*(b(x,\varphi_n))=\psi^*(F(b(x,\psi_n)))=F^*\psi^*(b(x,\psi_n))=0.$$

Отсюда в силу b-базисности в Z системы $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ получаем, что $\psi^*=0$. Поэтому, из фредгольмовости оператора F получаем $\ker F=\{0\}$. Значить оператор F ограниченно обратим. Теорема доказана.

Справедлива следующая

Следствие 2.1.1. *Пусть* $\{\varphi_n\}_{n\in N}\subset Y$ *образует* b*-базис в* Z *с* b*-сопряженной системой* $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}\subset\sigma(Z,X)$, *система* $\{\psi_n\}_{n\in N}\subset Y$ *имеет конечное число членов отличных от элементов* $\{\varphi_n\}_{n\in N}$. *Тогда для системы* $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *условия a) - d) теоремы 2.1.2 эквивалентны.*

Доказательство. Обозначим через K множество тех индексов k, при которых $\psi_k\neq\varphi_k$. Пусть

$$\tilde{\psi}_n=\begin{cases}\varphi_n, n\notin K\\ \psi_n-\varphi_n, n\in K\end{cases}$$

Определим оператор A по формуле $A(z)=\sum_{k\in K}b(\varphi_k^*(z),\tilde{\psi}_k)$. Очевидно, что $A\in\sigma(Z)$. Поэтому оператор $F=I+A$ является фредгольмовым оператором, причем

$F(b(x,\varphi_n)) = b(x,\psi_n)$ при любых $x \in X$ и $n \in N$. По Теореме 2.1.2 получаем, что свойства a) - d) эквивалентны. Лемма доказана.

Определение 2.1.2. *Систему* $\{y_n\}_{n\in N}$ *с* b*-биортогональной* $\{y_n^*\}_{n\in N}$ *назовем* p*-*b*-бесселевой в* Z*, если* $\forall z \in Z$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n^*(z)\|_X^p\right)^{\frac{1}{p}} \le M_1\|z\|_Z$.

Если p*-*b*-бесселевая в* Z *система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *образует* b*-базис, то* $\{y_n\}_{n\in N}$ *назовем* p*-*b*-базисом в* Z.

Теорема 2.1.4. *Пусть система* $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *образует* p*-*b*-базис* $(1 < p < +\infty)$ *в* Z *с* b*-сопряженной системой* $\{\varphi_n^*\}_{n\in N} \subset \sigma(Z,X)$*, система* $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$ q*-близка к* $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$. *Тогда для системы* $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *условия a)-d) теоремы 2.1.2 эквивалентны.*

Доказательство. Так как системы $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ и $\{\psi_n\}_{n\in N}$ q-близки, а система $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ $p-b$-бесселева в Z, то $\forall z \in Z$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z),\psi_n)$ сходится. В самом деле, $\forall z \in Z$, $m \in N$ имеем:

$$\left\|\sum_{n=m+1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z),\psi_n-\varphi_n)\right\|_Z \le M\sum_{n=m+1}^{\infty}\|\varphi_n^*(z)\|_X\|\psi_n-\varphi_n\|_Y \le$$

$$\le M\left(\sum_{n=m+1}^{\infty}\|\varphi_n^*(z)\|_X^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=m+1}^{\infty}\|\psi_n-\varphi_n\|_Y^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z),\psi_n)$ сходится. Далее, рассмотрим оператор F, определенный соотношением $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z),\psi_n)$, $z \in Z$. Ясно, что $F = I + T$, где оператор T задан по формуле $T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z),\psi_n-\varphi_n)$, $z \in Z$. Для $\forall m \in N$ обозначим через T_m оператор, определенный выражением $T_m(z) = \sum_{n=1}^{m} b(\varphi_n^*(z),\psi_n-\varphi_n)$, $z \in Z$. Очевидно, что оператор T_m компактен. С другой стороны, имеем

$$\|Tz-T_mz\|_Z = \left\|\sum_{n=m+1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z),\psi_n-\varphi_n)\right\|_Z \le M \sum_{n=m+1}^{\infty} \left\|\varphi_n^*(z)\right\|_X \|\psi_n-\varphi_n\|_Y \le$$

$$\le M\left(\sum_{n=m+1}^{\infty}\left\|\varphi_n^*(z)\right\|_X^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=m+1}^{\infty}\|\psi_n-\varphi_n\|_Y^q\right)^{\frac{1}{q}} \le M_2\|z\|_Z\left(\sum_{n=m+1}^{\infty}\|\psi_n-\varphi_n\|_Y^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Поэтому

$$\|T-T_m\| \le M_2\left(\sum_{n=m+1}^{\infty}\|\psi_n-\varphi_n\|_Y^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Следовательно, T_m равномерно сходится к T. Таким образом, оператор T компактен, тем самым F - фредгольмовый оператор. Так как $F(b(x,\varphi_n)) = b(x,\psi_n)$, $\forall n \in N$, то применяя Теорему 2.1.2, получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

В следующей теореме изучаются эквивалентные свойства системы близкой к b-базису.

Теорема 2.1.5. *Пусть X, Y и Z - B-пространства, система $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ образует b-базис в Z с b-биортогональной системой $\{\varphi_n^*\}_{n\in N} \subset \sigma(Z,X)$, система $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$ такая, что $\sum_{n=1}^{\infty}\|\psi_n-\varphi_n\|_Y \|\varphi_n^*\| < +\infty$. Тогда для системы $\{\psi_n\}_{n\in N}$ условия a)-d) теоремы 2.1.2 эквивалентны.*

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z),\psi_n-\varphi_n)$. Очевидно, что оператор T_n, определенный выражением $T_nz = T_m(z) = \sum_{n=1}^{m} b(\varphi_n^*(z),\psi_n-\varphi_n)$, $z \in Z$, компактен в Z. Следовательно, оператор T: $T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z),\psi_n-\varphi_n)$ является компактным. Тогда оператор $F = I + T$ фредгольмовый и имеет местосоотношение $F(b(x,\varphi_n)) = b(x,\psi_n)$, $\forall n \in N$. Применяя Теорему 2.1.2, получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Следствие 2.1.2. *Пусть система* $\{\varphi_n\}_{n\in N}\subset Y$ *образует* b*-базис в* Z *с* b*-биортогональной системой* $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$, *а система* $\{\psi_n\}_{n\in N}\subset Y$ *такая, что* $\sum_{n=1}^{\infty}\|\psi_n-\varphi_n\|_Y\|\varphi_n^*\|<\frac{1}{M}$. *Тогда* $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *образует* b*-базис,* b*-изоморфный к* $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.

Аналогично доказывается следующая

Теорема 2.1.6. *Пусть система* $\{\varphi_n\}_{n\in N}\subset Y$ *образует* b*-базис в* Z *с* b*-биортогональной системой* $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$, *система* $\{\psi_n\}_{n\in N}\subset Y$ *имеет* b*-биортогональную систему* $\{\psi_n^*\}_{n\in N}$: $\sum_{n=1}^{\infty}\|\psi_n^*-\varphi_n^*\|\|\varphi_n\|_Y<+\infty$ *и* $\varphi_n^*-\psi_n^*\in\sigma(Z,X)$, $n\in N$. *Тогда* $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *образует* b*-базис в* Z, b*-изоморфный к* $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.

2.2. Устойчивость b-базиса в банаховых пространствах

Пусть Y - банахово пространство, X и H - гильбертовы пространства с соответствующими скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_X$ и $(\cdot,\cdot)_H$, $b: X\times Y\to H$ - билинейное отображение удовлетворяющее условию (1.1.1).

Определение 2.2.1. b*-базис* $\{y_n\}_{n\in N}$ *в* H *назовем* b*-ортонормированным, если ее* b*-биортогональная система совпадает с* $\{y_n\}_{n\in N}$.

Следующая теорема является гильбертовым обобщением теоремы Пэли-Винера.

Теорема 2.2.1. *Пусть система* $\{\varphi_n\}_{n\in N}\subset Y$ *образует* b*-ортонормированный* b*-базис в* H, *а система* $\{\psi_n\}_{n\in N}\subset Y$ *такая, что* $\exists\theta\in[0,1)$, *для любой конечной последовательности* $\{x_n\}\subset X$ *имеет место соотношение*

$$\left\|\sum_n b(x_n,\varphi_n-\psi_n)\right\|_H^2\le\theta^2\sum_n\|x_n\|_X^2. \tag{2.2.1}$$

Тогда система $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *образует* b*-базис в* H, b*-изоморфный к* $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.

Доказательство. Ясно, что в случае $\theta=0$ получим $\varphi_n=\psi_n$, $\forall n\in N$. Пусть теперь $\theta\ne 0$. В силу того, что $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ - b-ортонормированный b-базис, то ясно, что $\forall h\in H$ имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|\omega_b(h,\varphi_n)\|_X^2 = \|h\|_H^2 .$$

Положим $h_m = \sum_{n=1}^{m} b(\omega_b(h,\varphi_n),\varphi_n - \psi_n)$. Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\|\omega_b(h,\varphi_n)\|_X^2$ имеем $\forall\varepsilon > 0$, $\exists m_0$, $\forall m \in N, m \ge m_0$, $\forall p \in N$

$$\sum_{n=m+1}^{m+p}\|\omega(h,\varphi_n)\|_X^2 < \left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^2 .$$

Поэтому, применяя (2.2.1) получаем, что $\forall\varepsilon > 0$, $\exists m_0$, $\forall m \in N, m \ge m_0$, $\forall p \in N$

$$\left\|\sum_{n=m+1}^{m+p} b(\omega_b(h,\varphi_n),\varphi_n - \psi_n)\right\|_H^2 \le \theta^2 \sum_{n=m+1}^{m+p}\|\omega_b(h,\varphi_n)\|_X^2 < \varepsilon^2 .$$

т. е. последовательность h_m фундаментальна, и значит, в силу полноты H сходится. Следовательно, можно определить линейный оператор T по формуле

$$T(h) = \sum_{n=1}^{\infty} b(\omega_b(h,\varphi_n),\varphi_n - \psi_n), \ h \in H .$$

Из (2.2.1) получаем, что

$$\left\|\sum_{n=1}^{m} b(\omega_b(h,\varphi_n),\varphi_n - \psi_n)\right\|_H^2 \le \theta^2 \sum_{n=1}^{m}\|\omega_b(h,\varphi_n)\|_X^2 .$$

Отсюда, переходя к пределу при $m \to \infty$ имеем

$$\|T(h)\|_H^2 = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} b(\omega_b(h,\varphi_n),\varphi_n - \psi_n)\right\|_H^2 \le \theta^2\|h\|_H^2 .$$

Итак, $\|T(h)\|_H \le \theta\|h\|_H$, и тем самым $\|T\| < 1$. Следовательно, по теореме Банаха оператор $I - T$ ограниченно обратим. Очевидно, что

$$(I - T)(h) = \sum_{n=1}^{\infty} b(\omega_b(h,\varphi_n),\psi_n), \ h \in H .$$

В частности,

$$(I - T)(b(x,\varphi_n)) = b(x,\psi_n), \forall n \in N .$$

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим случай банаховых пространств.

Теорема 2.2.2. *Пусть* X *- банахово пространство, система* $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *образует* b*-базис в* Z *и система* $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *такая, что* $\exists\theta \in [0,1)$, *для любой конечной последовательности* $\{x_n\} \subset X$ *верно соотношение*

$$\left\|\sum_n b(x_n,\varphi_n-\psi_n)\right\|_Z \le \theta \left\|\sum_n b(x_n,\varphi_n)\right\|_Z . \tag{2.2.2}$$

Тогда система $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *образует* b*-базис,* b*-изоморфный к* $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.

Доказательство. Используя (2.2.2) легко показать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b(x_n,\varphi_n-\psi_n)$ для $\forall \hat{x}=\{x_n\}\in \hat{X}_\Phi$. Определим оператор T по формуле

$$T(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z),\varphi_n-\psi_n),\, z\in Z ,$$

где $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$ - b-биортогональная система к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$. Из (2.2.2) следует, что $\|T\|\le\theta<1$. Следовательно, по теореме Банаха оператор $I-T$ ограниченно обратим. Ясно, что

$$(I-T)(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z),\psi_n),\, z\in Z .$$

Поэтому

$$(I-T)(b(x,\varphi_n))=b(x,\psi_n),\, \forall n\in N ,\, \forall x\in X ,$$

т. е. $\{\psi_n\}_{n\in N}$ образует b-базис в Z b-изоморфный к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$. Теорема доказана.

2.3. $\hat{X}$-бесселевый b-базис в банаховых пространствах и его устойчивость

Пусть X, Y и Z - B-пространства, система $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ из Y образует b-базис в Z, с b-биортогональной системой $\{\varphi_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z,X)$ и $\hat{X}_\Phi$ - пространство последовательностей из коэффициентов разложений по b-базису $\{\varphi_n\}_{n\in N}$, $b: X\times Y\to Z$ - билинейное отображение, удовлетворяющее условию (1.1.1). Пусть $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ - KB-пространства последовательностей векторов над X и Y соответственно.

Следующее понятие является обобщением понятия p-бесселевого базиса при билинейном отображении.

Определение 2.3.1. *b-базис $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ в Z назовем $b_{\hat{X}}$-бесселевым, если $\exists B>0$ для $\forall z\in Z$ имеет место $\left\|\{\varphi_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} \le B\|z\|_Z$, где $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$ - b-биортогональная система к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.*

Определение 2.3.2. *Будем говорить, что $\hat{X}$ нормально подчинена к $\hat{Y}$, если из $\{x_n\}\subset X$, $\{y_n\}\subset Y$, $\|x_n\|_X \le \|y_n\|_Y$ и $\{y_n\}\in\hat{Y}$ следует, что $\{x_n\}\in\hat{X}$ и $\|\{x_n\}\|_{\hat{X}} \le \|\{\varphi_n\}\|_{\hat{Y}}$.*

Следующая теорема является аналогом теоремы об изоморфности системы q-близкой к p-бесселевому базису.

Теорема 2.3.1. *Пусть $\hat{X}$ - рефлексивное CB-пространство такое, что $\hat{X}^*$ подчинена к $\hat{Y}$, система $\{\varphi_n\}\subset Y$ образует $b_{\hat{X}}$-бесселевый базис в Z и $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}\subset\sigma(Z,X)$. Пусть система $\{\psi_n\}\subset Y$ такая, что $\{\varphi_n-\psi_n\}_{n\in N}\in\hat{Y}$. Тогда для системы $\{\psi_n\}_{n\in N}$ условия a) - d) теоремы 2.1.2 эквивалентны.*

Доказательство. По Лемме 1.1.1 пространство $\hat{X}^*$ изоморфно пространству последовательностей $\hat{x}^*=\{x_n^*\}_{n\in N}\subset X^*$, для которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^*(x_n)$ при любом $\hat{x}=\{x_n\}_{n\in N}\in\hat{X}$ и выполняется условие

$$\left\|\hat{x}^*\right\|_{\hat{X}^*}=\sup_{\|\hat{x}\|=1}\left|\sum_{n=1}^{\infty}x_n^*(x_n)\right|.$$

Для $\forall\hat{x}^*=\{x_n^*\}_{n\in N}\in\hat{X}^*$ в силу Леммы 1.1.2 имеем $\hat{x}^*=\sum_{n=1}^{\infty}\{\delta_{nk}x_k^*\}_{k\in N}$. Выясним сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}b(\varphi_n^*(z),\varphi_n-\psi_n)$ при любом $z\in Z$. Зафиксируем $m,p\in N$ и $z\in Z$ и обозначим $w=\sum_{n=m+1}^{m+p}b(\varphi_n^*(z),\varphi_n-\psi_n)$. По следствию теоремы Хана-Банаха существует $f\in Z^*$: $\|f\|=1$, что $f(w)=\|w\|_Z$. Имеем

$$\left\|\sum_{n=m+1}^{m+p}b(\varphi_n^*(z),\varphi_n-\psi_n)\right\|_Z=\|w\|_Z=f(w)=f\left(\sum_{n=m+1}^{m+p}b(\varphi_n^*(z),\varphi_n-\psi_n)\right)=$$

$$\leq \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} f(b(\varphi_n^*(z), \varphi_n - \psi_n)) \right| = \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} b^*(f, \varphi_n - \psi_n))(\varphi_n^*(z)) \right| \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{k=m+1}^{m+p} \left\{ \delta_{nk} b^*(f, \varphi_k - \psi_k) \right\}_{n\in N} \right\|_{\hat{X}^*} \left\| \left\{ \varphi_n^*(z) \right\}_{n\in N} \right\|_{\hat{X}} \leq B \|z\|_Z \left\| \sum_{k=m+1}^{m+p} \left\{ \delta_{nk} b^*(f, \varphi_k - \psi_k) \right\}_{n\in N} \right\|_{\hat{X}^*}.$$

Так как $\left\| b^*(f, y) \right\| \leq M \|f\| \|y\|_Y$, то из подчиненности $\hat{X}^*$ к $\tilde{Y}$, имеем

$$\left\| \sum_{n=m+1}^{m+p} b(\varphi_n^*(z), \varphi_n - \psi_n) \right\|_Z \leq BM \left\| \sum_{k=m+1}^{m+p} \left\{ \delta_{nk} (\varphi_k - \psi_k) \right\}_{k\in N} \right\|_{\hat{Y}} \|z\|_Z .$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z), \varphi_n - \psi_n)$ сходится при любом $z \in Z$, и значит, определен линейный ограниченный оператор $T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z), \varphi_n - \psi_n)$, $z \in Z$. Далее, имеет место неравенство

$$\|T(z)\|_Z \leq BM \left\| \{\varphi_n - \psi_n\}_{n\in N} \right\|_{\hat{Y}} \|z\|_Z , \; z \in Z .$$

Легко показать, что оператор T является пределом последовательности операторов $T_m : Z \to Z$, заданных по формуле $T_m(z) = \sum_{n=1}^{m} b(\varphi_n^*(z), \varphi_n - \psi_n)$, $z \in Z$. Поэтому $T \in \sigma(Z, X)$ и $F = I - T$ является фредгольмовым оператором. Имеем $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z), \psi_n)$, $z \in Z$. Ясно, что $F(b(x, \varphi_n)) = b(x, \psi_n)$, $\forall x \in X$, $n \in N$. По Теореме 2.1.2 свойства a)–d) для системы $\{\psi_n\}_{n\in N}$ эквивалентны. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает следующее обобщение теоремы Бари, о базисности Рисса системы квадратично близкой к ортонормированному базису в гильбертовых пространствах.

Следствие 2.3.1. *Пусть* $\hat{X}$ *- рефлексивное* CB*-пространство и* $\hat{X}^*$ *подчинена к* $\hat{Y}$*, система* $\{\varphi_n\} \subset Y$ *образует* $b_{\hat{X}}$*-бесселевый базис в* Z *и* $\{\varphi_n^*\}_{n\in N} \subset \sigma(Z, X)$*. Пусть система* $\{\psi_n\} \subset Y$ *-* ω*-*b*-линейно независима в* Z *такая, что* $\{\varphi_n - \psi_n\}_{n\in N} \in \hat{Y}$*. Тогда* $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *образует* b*-базис* b*-изоморфный к* $\{\varphi_n\}_{n\in N}$*.*

Теорема 2.3.2. *Пусть* $\hat{X}$ *- рефлексивное* CB*-пространство и* $\hat{X}^*$ *подчинена к* $\hat{Y}$*, система* $\{\varphi_n\} \subset Y$ *образует* $b_{\hat{X}}$*-бесселевый базис в* Z*. Пусть система* $\{\psi_n\} \subset Y$ *такая, что* $\{\varphi_n - \psi_n\}_{n \in N} \in \hat{Y}$ *и* $\left\| \{\varphi_n - \psi_n\}_{n \in N} \right\|_{\tilde{Y}} < \frac{1}{MB}$. *Тогда* $\{\psi_n\}_{n \in N}$ *образует* b*-базис в* Z, b*-изоморфный к* $\{\varphi_n\}_{n \in N}$.

Доказательство. Как в доказательстве Теоремы 2.3.1, можно определить линейный и ограниченный оператор $T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z), \varphi_n - \psi_n)$, $z \in Z$, удовлетворяющий неравенству

$$\|T(z)\|_Z \leq BM \left\| \{\varphi_n - \psi_n\}_{n \in N} \right\|_{\hat{Y}} \|z\|_Z, \ z \in Z,$$

где $\{\varphi_n^*\}_{n \in N}$ - b-биортогональная система к $\{\varphi_n\}_{n \in N}$. Отсюда, согласно условию, получим

$$\|T\| \leq BM \left\| \{\varphi_n - \psi_n\}_{n \in N} \right\|_{\hat{Y}} < 1.$$

Поэтому по теореме Банаха, оператор $I - T$ ограниченно обратим. Ясно, что $(I - T)(b(x, \varphi_n)) = b(x, \psi_n)$ $\forall x \in X$, $n \in N$. Теорема доказана.

ГЛАВА III.
b-ФРЕЙМЫ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ И БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Понятие фрейма было введено в 1952 году R.J.Duffin и A.C.Schaeffer [124] в связи с изучением негармонических рядов Фурье относительно возмущенной системы экспонент. В этой основополагающей работе устанавливаются некоторые свойства фреймов из возмущенной системы экспонент $\left\{e^{i\lambda_n t}\right\}$, $t \in [-\pi, \pi]$, а также дано определение абстрактного фрейма в сепарабельных гильбертовых пространствах. Теория фреймов получило интенсивное развитие начиная с 80-х годов после основополагающих работ И.Добеши [117], И.Добеши, А.Гросман, И.Мейера [118], С.Малат [191] и др. В последующем этому направлению были посвящены многочисленные работы авторов Н.М.Астафьева [2], И.М.Дремин, О.В.Иванов, В.А.Нечитайло [123], К.Чуи [112], Е.Ковачевич, А.Чебира [185], И.Добеши [117], М.Фрейзер [72], O.Christensen [109], R.Young [220], Ch.Heil [149] и обзорные статьи P.G.Casazza, D.Han, D.Larson [107], K.Gröchenig [144], O.Christensen, C.Heil [110], O.Christensen, D.Stoeva [111], B.T.Bilalov, F.A.Guliyeva [92] и др. Одним из важных направлений теории фреймов является обобщение фреймов в гильбертовых и банаховых пространствах. В работе W.Sun [215] было введено понятие g-фрейма в гильбертовых пространствах и на этот случай перенесены многие свойства обычных фреймов. В работе Б.Т.Билалова, Ф.А.Гулиева [93] введено понятие t-фрейма в тензорных произведениях гильбертовых пространств. Непрерывные фреймы в гильбертовых были изучены S.T.Ali, J.P.Antoine, J.P.Gazeau [80]. В этом направлении известны также работы A.Rahimi, B.Daraby, Z.Darvishi [203], A.Rahimi, A.Najati, Y.N.Dehghan [204]. На случай банаховых пространств, фреймы были обобщены в различных направлениях. Фреймы в банаховых пространствах впервые были изучены K.Gröchenig [144] в 1991 году. В этой работе введены и изучены понятия банахова фрейма и атомарного разложения в банаховых пространствах. В работе P.Casazza, D.Han, D.Larson [107] фреймы в банаховых пространствах определяются как проекции безусловных базисов объемляющего банахова пространства. A.Aldrobi, Q.Sun, W.Tag [79] в лебеговых пространствах L_p введены и изучены понятия p–фрейма и атомарного разложения относительно shirt invariant подпространств L_p. p-фреймы и их связи с q-Рисс базисами в банаховых пространствах изучались в работе O.Christensen, D.T.Stoeva [111]. Распространение этой идеи на случай общих банаховых пространств числовых последовательностей изучалась в работах P.G.Casazza, O.Christensen, D.T.Stoeva [106], Б.Т.Билалова [8], П.А.Терехина [70]. Другим направлением теории фреймов является изучение метода возмущения фреймов. В этом направлении известны результаты в контексте классической теоремы Пэли-Винера. По поводу этих результатов можно посмотреть монографии R.Young [220], Ch.Heil [149], O.Christensen [109] и статьи R.Balan [86], O.Christensen, Ch.Heil [110], P.G.Casazza, O.Christensen [105]. В этой главе посредством билинейных отображений дается понятие b-фрейма в гильбертовых и банаховых пространствах, обобщающее понятие фреймов. Многие классические факты переносятся на этот случай. Введено понятие b-атомарного разложения и изучено ее нетерово возмущение.

3.1. b-фреймы и некоторые свойства b-фреймового оператора в гильбертовых пространствах

Пусть X и H - гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_X$ и $(\cdot,\cdot)_H$ соответственно, Y - банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_Y$. $b: X \times Y \to H$ - билинейное отображение, удовлетворяющее

$$\exists M > 0: \ \|b(x,y)\|_H \le M\|x\|_X \|y\|_Y, \ \forall x \in X, \ \forall y \in Y. \qquad (3.1.1)$$

Следующее понятие является обобщением фреймов в гильбертовых пространствах.

Определение 3.1.1. *Последовательность* $\{y_k\}_{k\in N}$ *назовем* b*-фреймом в* H*, если существуют постоянные* $A, B > 0$ *такие, что*

$$A\|h\|_H^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} \|\omega_b(h, y_k)\|_X^2 \le B\|h\|_H^2, \quad \forall h \in H. \tag{3.1.2}$$

Постоянные A и B будем называть границами b-фрейма. При выполнении правой части (3.1.2) $\{y_k\}_{k\in N}$ назовем b-бесселевой в H.

Приведем характеристическое свойство b-бесселевых систем.

Теорема 3.1.1. *Последовательность* $\{y_k\}_{k\in N} \subset Y$ *является* b*-бесселевой в* H *с границей* B *тогда и только тогда, когда определен линейный ограниченный оператор* $T: l_2(X) \to H$ *такой, что*

$$T(\{x_k\}_{k\in N}) = \sum_{k=1}^{\infty} b(x_k, y_k), \ \|T\| \le \sqrt{B}. \tag{3.1.3}$$

Доказательство. Пусть $\{y_k\}_{k\in N}$ - b-бесселева в Z с границей B. Для любого $\hat{x} = \{x_k\}_{k\in N} \in l_2(X)$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b(x_k, y_k)$ сходится. На самом деле, пусть $h_n = \sum_{k=1}^{n} b(x_k, y_k)$. При $m > n$ имеем

$$\|h_n - h_m\|_H = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} b(x_k, y_k) \right\|_H = \sup_{\|h\|=1} \left| (\sum_{k=n+1}^{m} b(x_k, y_k), h)_H \right| =$$

$$\le \sup_{\|h\|=1} \left| (\sum_{k=n+1}^{m} (x_k, \omega_b(h, y_k))_X \right| \le \sup_{\|h\|=1} \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\|_X \|\omega_b(h, y_k)\|_X \le$$

$$\le \sup_{\|h\|=1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|\omega_b(h, y_k)\|_X^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\|_X^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{B} \left(\sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\|_X^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Поскольку правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$, то последовательность $\{h_n\}_{n\in N}$ удовлетворяет критерию Коши, и тем самым сходится. Значит, определен оператор $T(\{x_k\}_{k\in N}) = \sum_{k=1}^{\infty} b(x_k, y_k)$. Аналогично вышепоказанному, легко показать, что $\|T(\{x_k\}_{k\in N})\|_{lH} \le \sqrt{B} \|\{x_k\}_{k\in N}\|_{l_2(X)}$. Отсюда, получаем $\|T\| \le \sqrt{B}$.

Обратно, пусть определен линейный ограниченный оператор $T: l_2(X) \to H$, $T(\{x_k\}_{k\in N}) = \sum_{k=1}^{\infty} b(x_k, y_k)$ и $\|T\| \le \sqrt{B}$. Докажем, что система $\{y_k\}_{k\in N}$ является b-

бесселевой в H с границей B. Для произвольных $\hat{x}=\{x_k\}_{k\in N}\in l_2(X)$ и $h\in H$ рассмотрим $(T(\{x_k\}_{k\in N}),h)_H$. Имеем

$$(T(\{x_k\}_{k\in N}),h)_H=\sum_{k=1}^{\infty}(b(x_k,y_k),h)_H=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k,\omega_b(h,y_k))_X=(\{x_k\}_{k\in N},\{\omega_b(h,y_k)\}_{k\in N})_X .$$

Отсюда непосредственно получаем выражение для сопряженного оператора

$$T^*h=\{\omega_b(h,y_k)\}_{k\in N}\,,\ h\in H . \tag{3.1.4}$$

Имеем $\sum_{k=1}^{\infty}\|\omega_b(h,y_k)\|_X^2=\|T^*h\|_{l_2(X)}^2\le\|T^*\|^2\|h\|_H^2\le B\|h\|_H^2$. Теорема доказана.

Пусть последовательность $\{y_k\}_{k\in N}\subset Y$ образует b-фрейм в H. Тогда определен оператор $S:H\to H$ по формуле

$$S(h)=\sum_{k=1}^{\infty}b(\omega_b(h,y_k),y_k),\ \forall h\in H .$$

Оператор S назовем b-фреймовым оператором для $\{y_k\}_{k\in N}$.

Справедлива

Теорема 3.1.2. *Пусть* $\{y_k\}_{k\in N}\subset Y$ *образует* b*-фрейм в* H *с границами* A, B. *Тогда* b*-фреймовый оператор* S *является положительным самосопряженным ограниченно обратимым оператором и* $AI\le S\le BI$.

Доказательство. Для каждого $h\in H$ имеем

$$(S(h),h)_H=\sum_{k=1}^{\infty}(b(\omega_b(h,y_k),y_k),h)_H=\sum_{k=1}^{\infty}\|\omega_b(h,y_k)\|_X^2 ,$$

т. е. S - положительный оператор и $AI\le S\le BI$. Пусть оператор $T:l_2(X)\to H$ определен по формуле (3.1.3). Тогда из (3.1.3) непосредственно следует, что $S=TT^*$. Отсюда получаем, что S - самосопряженный оператор. Далее, при любом $h\in H$ имеет место

$$A\|h\|_H^2\le\sum_{k=1}^{\infty}\|\omega_b(h,y_k)\|_X^2=(S(h),h)_H\le\|Sh\|_H\|h\|_H ,$$

и следовательно, $A\|h\| \le \|Sh\|_H$. Таким образом, как сюръективный и инъективный оператор S ограниченно обратим. Теорема доказана.

Дадим критерий b-фреймовости последовательности.

Теорема 3.1.3. *Последовательность* $\{y_k\}_{k\in N} \subset Y$ *образует* b*-фрейм в* H *тогда и только тогда, когда определен ограниченный сюръективный оператор по формуле (3.1.3).*

Доказательство. Пусть последовательность $\{y_k\}_{k\in N}$ образует b-фрейм в H и S - ее b-фреймовый оператор. Тогда она b-бесселева в H и поэтому в силу Теоремы 3.1.1 по формуле (3.1.2) определен ограниченный оператор $T: l_2(X) \to H$. Остается показать, что $\operatorname{Im} T = H$. Поскольку $TT^* = S$ и $\operatorname{Im} S = H$, то $\operatorname{Im} T = H$.

Обратно, пусть по формуле (3.1.2) определен ограниченный сюъректнвный оператор $T: l_2(X) \to H$. Покажем, что $\{y_k\}_{k\in N}$ образует b-фрейм в H. Согласно Теореме 3.1.1 последовательность $\{y_k\}_{k\in N}$ b-бесселева в Z. Возьмем произвольный $h \in H$. Так как $h = TT^+h$, то пологая $T^+h = \{x_k\}_{k\in N}$ получим

$$\|h\|_H^4 = \left|(h,h)_H\right|^2 = \left|(T(\{x_k\}_{k\in N}), h)_H\right|^2 =$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}(b(x_k, y_k), h)_H\right|^2 = \left|\sum_{k=1}^{\infty}(x_k, \omega_b(h, y_k))_X\right|^2 \le$$

$$\le \left|\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|_X \|\omega_b(h, y_k)\|_X\right|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|_X^2 \sum_{k=1}^{\infty}\|\omega_b(h, y_k)\|_X^2 \le$$

$$= \|T^+h\|_{l_2(X)}^2 \sum_{k=1}^{\infty}\|\omega_b(h, y_k)\|_X^2 \le \|T^+\|\|h\|_H^2 \sum_{k=1}^{\infty}\|\omega_b(h, y_k)\|_X^2 .$$

Таким образом, для любого $h \in H$ имеем

$$\frac{1}{\|T^+\|^2}\|h\|_H^2 \le \sum_{k=1}^{\infty}\|\omega_b(h, y_k)\|_X^2 = \|T^*h\|_{l_2(X)}^2 \le \|T\|^2\|h\|_H^2 ,$$

т. е. система $\{y_k\}_{k\in N}$ образует b-фрейм в H. Теорема доказана.

Также имеет место следующий критерий b-фреймовости.

Теорема 3.1.4. *Последовательность* $\{y_k\}_{k\in N} \subset Y$ *образует* b*-фрейм в* H *с границами* A *и* B *тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

1) $\{y_k\}_{k\in N}$ *-* b *-полна в* H*;*

2) определен оператор $T: l_2(X) \to H$ *по формуле (3.1.2) такой, что*

$$A\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|_X^2 \le \left\|T(\{x_k\}_{k\in N}\right\|_H^2 \le B\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|_X^2, \ \forall\{x_k\}_{k\in N} \in (KerT)^{\perp}.$$

Доказательство. Пусть $\{y_k\}_{k\in N}$ образует b-фрейм с границами A и B. Сначала докажем b-полноту последовательности $\{y_k\}_{k\in N}$ в H. Допустим противное, т. е. пусть последовательность $\{y_k\}_{k\in N}$ не b-полна в H. Тогда существует ненулевой элемент $h_0 \in H$ такой, что $\omega_b(h_0, y_k) = 0$, $\forall k \in N$. Согласно (3.1.1) отсюда получим $h_0 = 0$, и значит, допущение не верно. Ясно, что множество $\operatorname{Im}T^*$ является замкнутым, и значит $\operatorname{Im}T^* = (KerT)^{\perp}$. Возьмем произвольный элемент $\{x_k\}_{k\in N} \in (KerT)^{\perp}$. Положим $h \in H$ такой, что $\{x_k\}_{k\in N} = T^*h$. Имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|\omega_b(h, y_k)\|_X^2\right)^2 = (TT^*h, h)_H^2 \le \|TT^*h\|_H^2\|h\|_H^2 \le \frac{1}{A}\|TT^*h\|_H^2\sum_{k=1}^{\infty}\|\omega_b(h, y_k)\|_X^2 \cdot$$

Отсюда следует, что $A\sum_{k=1}^{\infty}\|\omega_b(h, y_k)\|_X^2 \le \|TT^*h\|_H^2$. С другой стороны, справедливо

$$\|TT^*h\|_H^2 \le \|T\|^2\|T^*h\|_{l_2(X)}^2 \le B\sum_{k=1}^{\infty}\|\omega_b(h, y_k)\|_X^2,$$

т. е. для любого $\forall\{x_k\}_{k\in N} \in (KerT)^{\perp}$ имеет место 2).

Обратно, пусть имеют место 1) и 2). Покажем, что T - сюръективный оператор. Действительно, пусть $h \in \overline{\operatorname{Im}T}$ и $h_n \in \operatorname{Im}T$ такая, что $h_n \to h$ при $n \to \infty$. Тогда существует $\hat{x}_n \in (KerT)^{\perp}$ такая, что $h_n = T\hat{x}_n$. Из 2) легко заметить, что последовательность $\hat{x}_n$ фундаментальна, и поэтому, сходится к $\hat{x} \in (KerT)^{\perp}$. Учитывая непрерывность оператора T, получим $h_n = T\hat{x}_n \to T\hat{x} = h$, т. е. множество $\operatorname{Im}T$ замкнуто. Далее, из b-полноты $\{y_k\}_{k\in N}$ в H и $L_b(\{y_k\}_{k\in N}) \subset \operatorname{Im}T$ следует $\operatorname{Im}T = H$. Для $\forall\hat{x} \in l_2(X)$ имеет место $T^+T\hat{x} \in (KerT)^{\perp}$. Тогда из 2) получим

$$A\|T^+T\hat{x}\|_{l_2(X)}^2 \le \|TT^+T\hat{x}\|_H^2 = \|T\hat{x}\|_H^2.$$

Следовательно, $\|T^{+}\| \le \dfrac{1}{\sqrt{A}}$. Поскольку

$$\operatorname{Im}(T^{*})^{+} = \operatorname{Im}(T^{+})^{*} = (KerT^{+})^{\perp} = \operatorname{Im}T = H ,$$

для $\forall h \in H$ получаем $h = (T^{*})^{+}T^{*}h$ и

$$\|h\|_{H}^{2} = \|(T^{*})^{+}T^{*}h\|_{H}^{2} \le \|(T^{*})^{+}\|^{2}\|T^{*}h\|_{l_2(X)}^{2} = \|(T^{+})^{*}\|^{2}\|T^{*}h\|_{l_2(X)}^{2} =$$

$$= \|T^{+}\|^{2}\|T^{*}h\|_{l_2(X)}^{2} \le \frac{1}{A}\|T^{*}h\|_{l_2(X)}^{2} .$$

Теорема доказана.

В следующей теореме показывается, что b -фреймы являются образами b -ортонормированных b -базисов ограниченным суръективным оператором.

Теорема 3.1.5. *Пусть последовательность* $\{\varphi_k\}_{k\in N} \subset Y$ *образует* b *-ортонормированный* b *-базис в* H. *Тогда система* $\{y_k\}_{k\in N} \subset Y$ *является* b *-фреймом в* H *тогда и только тогда, когда существует ограниченный сюръективный оператор* $U : H \to H$: $U(b(x,\varphi_k)) = b(x, y_k)$, $\forall x \in X$ *и* $\forall k \in N$.

Доказательство. Пусть $\{y_k\}_{k\in N}$ образует b -фрейм в H. По Теореме 3.1.3 определен ограниченный сюръективный оператор $T : l_2(X) \to H$ по формуле (3.1.2). Рассмотрим оператор $\Phi : H \to l_2(X)$ по формуле $\Phi(h) = \{\omega_b(h,\varphi_k)\}_{k\in N}$. Ясно, что $\Phi(b(x,\varphi_j)) = \{\delta_{jk}x\}_{k\in N}$. Определим оператор $U : H \to H$ по формуле $U = T\Phi$. Очевидно, что U есть ограниченный сюръективный оператор и имеет место

$$U(b(x,\varphi_k)) = T\Phi(b(x,\varphi_k)) = T(\{\delta_{jk}x\}_{k\in N}) = b(x, y_k) ,\ \forall x \in X ,\ \forall k \in N .$$

Обратно, пусть существует ограниченный сюръективный оператор $U : H \to H$ такой, что $U(b(x,\varphi_k)) = b(x, y_k)$, $\forall x \in X$ и $\forall k \in N$. Покажем, что $\{y_k\}_{k\in N}$ является b -фреймом в H. Для $\forall h \in H$ и $\forall x \in X$ получим

$$(x, \omega_b(h, y_k))_X = (b(x, y_k), h)_H = (Ub(x,\varphi_k), h)_H =$$

$$= (b(x,\varphi_k), U^{*}h)_H = (x, \omega_b(U^{*}h,\varphi_k))_X ,$$

и значит, $\omega_b(h, y_k) = \omega_b(U^{*}h,\varphi_k)$, $h \in H$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\omega_b(h,y_k)\right\|_X^2=\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\omega_b(U^*h,\varphi_k)\right\|_X^2=\left\|U^*h\right\|_{l_2(X)}^2. \qquad (3.1.5)$$

В силу сюръективности U, существует $c>0$ такой, что $\left\|U^*h\right\|_{l_2(X)}\ge c\|h\|_H$. С другой стороны, $\left\|U^*h\right\|_{l_2(X)}\le\|U\|\|h\|_H$. Таким образом, из (3.1.5) следует, что

$$c\|h\|_H^2\le\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\omega_b(h,y_k)\right\|_X^2\le\|U\|\|h\|_H^2,$$

т. е. $\{y_k\}_{k\in N}$ образует b-фрейм в H. Теорема доказана.

Пусть последовательность $\{y_k\}_{k\in N}\subset Y$ образует b-фрейм в H и рассмотрим оператор матрицу $U=(u_{ik})$, $i,k\in N$, где $u_{ik}\in L(X,X)$. Предположим, что система $\{\varphi_i\}_{i\in N}\subset Y$ удовлетворяет условию

$$\omega_b(h,\varphi_i)=\sum_{k=1}^{\infty}u_{ik}(\omega_b(h,y_k)). \qquad (3.1.6)$$

В следующей теореме устанавливается b-фреймовость системы $\{\varphi_i\}_{i\in N}$.

Теорема 3.1.6. *Пусть последовательность $\{y_k\}_{k\in N}\subset Y$ образует b-фрейм в Z с границами A и B. Пусть оператор U заданный по формуле $U(\hat{x})=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}u_{ik}(x_k)\right\}_{i\in N}$ является ограниченным в $l_2(X)$. Тогда система $\{\varphi_i\}_{i\in N}$ определенная соотношением (3.1.6) образует b-фрейм в H тогда и только тогда, когда $\exists c>0$ такой, что*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\omega_b(h,\varphi_i)\right\|_X^2\ge c\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\omega_b(h,y_i)\right\|_X^2,\quad \forall h\in H. \qquad (3.1.7)$$

Доказательство. Пусть $\{\varphi_i\}_{i\in N}$ - b-фрейм в H с границами A_1 и B_1. Тогда $\forall h\in H$ имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\omega_b(h,\varphi_i)\right\|_X^2\ge A_1\|h\|_H^2\ge\frac{A_1}{B}\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\omega_b(h,y_i)\right\|_X^2.$$

Обратно, пусть $\exists c>0$ такой, что имеет место (3.1.7). Имеем

$$U(\{\omega_b(h,y_k)\}_{k\in N})=\{\omega_b(h,\varphi_k)\}_{k\in N},\ \forall h\in H.$$

Следовательно,

$$\sum_{l=1}^{\infty}\|\omega_b(h,\varphi_i)\|_X^2 = \|U(\{\omega_b(h,y_i)\}_{i\in N})\|_{l_2(X)}^2 \le$$

$$\le \|U\|^2 \|\{\omega_b(h,y_i)\}_{i\in N}\|_{l_2(X)}^2 \le B\|U\|^2\|h\|_H^2 .$$

Далее, согласно (3.1.7) и (3.1.2) получим

$$\sum_{l=1}^{\infty}\|\omega_b(h,\varphi_i)\|_X^2 \ge c\sum_{l=1}^{\infty}\|\omega_b(h,y_i)\|_X^2 \ge cA\|h\|_H^2 ,$$

т. е. $\{\varphi_i\}_{i\in N}$ образует b-фрейм в H. Теорема доказана.

Теорема 3.1.7. *Пусть последовательность* $\{y_k\}_{k\in N} \subset Y$ *образует* b*-фрейм в* Z *с границами* A *и* B*, операторы* $u_{lk} \in L(X,X)$*,* $i,k \in N$*, такие, что имеет место* $\|u_{lk}(x)\|_X \ge a_{lk}\|x\|_X$*,* $a_{lk} \ge 0$*,* $\forall x \in X$*, и выполнены условия*

$$b = \sup_k \sum_{j=1}^{\infty}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} u_{ij}^* u_{lk}\right\| < +\infty; \quad a = \inf_k\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}^2 - \sum_{j\ne k}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} u_{ij}^* u_{ik}\right\|\right) > 0 .$$

Тогда $\{\varphi_i\}_{i\in N}$ *является* b*-фреймом в* H *с границами* aA *и* bB*.*

Доказательство. Возьмем $\forall h \in H$. Сначала докажем, что $\{\varphi_i\}_{i\in N}$ является b-бесселевой в H с границей bB. Имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|\omega_b(h,\varphi_i)\|_X^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}(\omega_b(h,y_k))\right\|_X^2 = \sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}(\omega_b(h,y_k)), \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij}(\omega_b(h,y_j)))_H =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(u_{ij}^* u_{ik}(\omega_b(h,y_k)), \omega_b(h,y_j))_H \le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} u_{lj}^* u_{lk}\right\| \|\omega_b(h,y_k)\|_X \|\omega_b(h,y_j)\|_X \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} u_{ij}^* u_{ik}\right\| \|\omega_b(h,y_k)\|_X^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} u_{ij}^* u_{ik}\right\| \|\omega_b(h,y_j)\|_X^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} u_{ij}^* u_{ik}\right\| \|\omega_b(h,y_k)\|_X^2 \le b\sum_{k=1}^{\infty}\|\omega_b(h,y_k)\|_X^2 \le bB\|h\|_H^2 .$$

Теперь установим для $\{\varphi_i\}_{i\in N}$ левую часть неравенства (3.1.2). Получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|\omega_b(h,\varphi_i)\|_X^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}(\omega_b(h,y_k))\right\|_X^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}(\omega_b(h,y_k)), \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij}(\omega_b(h,y_j)))_H = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\|u_{ik}(\omega_b(h,y_k))\|_X^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j\ne k}^{\infty}(u_{ij}^* u_{ik}(\omega_b(h,y_k)), \omega_b(h,y_j))_H = I_1 + I_2 .$$

Рассмотрим в отдельности I_1 и I_2. Ясно, что $I_1 \geq \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{lk}^2 \|\omega_b(h, y_k)\|_X^2$. Далее, получаем

$$|I|_2 \leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j\neq k}^{\infty}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} u_{ij}^* u_{ik}\right\| \|\omega_b(h, y_k)\|_X \|\omega_b(h, y_j)\|_X \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j\neq k}^{\infty}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} u_{ij}^* u_{ik}\right\| \|\omega_b(h, y_k)\|_X^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j\neq k}^{\infty}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} u_{ij}^* u_{ik}\right\| \|\omega_b(h, y_j)\|_X^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j\neq k}^{\infty}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} u_{ij}^* u_{ik}\right\| \|\omega_b(h, y_j)\|_X^2 .$$

Следовательно

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\omega_b(h, \varphi_i)\|_X^2 = I_1 + I_2 \geq I_1 - |I_2| \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2 \|\omega_b(h, y_k)\|_X^2 - \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j\neq k}^{\infty}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} u_{ij}^* u_{ik}\right\| \|\omega_b(h, y_j)\|_X^2 \geq$$

$$\geq a\sum_{k=1}^{\infty} \|\omega_b(h, y_k)\|_X^2 \geq aA\|h\|_H^2 .$$

Теорема доказана.

3.2. b -фреймы в банаховых пространствах

Пусть X - банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$ и $\hat{X}$ - KB-пространство последовательностей векторов X. Пусть Y и Z - банаховы пространства с соответствующими нормами $\| \ \|_Y$ и $\| \ \|_Z$, $b: X \times Y \to Z$ - билинейное отображение, удовлетворяющее (3.1.1) и $b^*: Z^* \times Y \to X^*$ билинейное отображение заданное равенством (1.4.4).

Определение 3.2.1. *Систему* $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *назовем* $b_{\hat{X}^*}$*-фреймом в* Z^**, если для любого* $g \in Z^*$ *имеет место* $\{b^*(g, \varphi_n)\}_{n\in N} \in \hat{X}^*$ *и существуют постоянные* $0 < A \leq B < \infty$ *такие, что*

$$A\|g\| \leq \left\|\{b^*(g, \varphi_n)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}^*} \leq B\|g\|. \qquad (3.2.1)$$

Имеет место следующий критерий $b_{\hat{X}^*}$-фреймовости.

Теорема 3.2.1. *Система* $\{\varphi_n\}_{n\in N}\subset Y$ *образует* $b_{\hat{X}^*}$*-фрейм в* Z^**, тогда и только тогда, когда определен ограниченный сюръективный оператор* $T:\hat{X}\to Z$ *по формуле*

$$T\hat{x}=\sum_{n=1}^{\infty}b(x_n,\varphi_n)\,,\ \forall\hat{x}=\{x_n\}_{n\in N}\in\hat{X}\ . \tag{3.2.2}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ - $b_{\hat{X}^*}$-фрейм в Z^*. Для любого конечного $\{x_n\}$ имеем

$$\left\|\sum_n b(x_n,\varphi_n)\right\|=\sup_{\|g\|=1}\left|g\left(\sum_n b(x_n,\varphi_n)\right)\right|=\sup_{\|g\|=1}\left|\sum_n b^*(g,\varphi_n)(x_n)\right|\le B\|\{x_n\}\|_{\hat{X}}\,.$$

Отсюда следует, что для $\forall\hat{x}=\{x_n\}_{n\in N}\in\hat{X}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b(x_n,\varphi_n)$ сходится и имеет место неравенство $\left\|\sum_{n=1}^{\infty}b(x_n,\varphi_n)\right\|\le B\|\hat{x}\|_{\hat{X}}$. Следовательно, линейный оператор $T:\hat{X}\to Z$, заданный по формуле (3.2.2) ограничен и $\|T\hat{x}\|_Z\le B\|\hat{x}\|_{\hat{X}}$. Далее, для $\forall g\in Z^*$ имеем

$$g(T\hat{x})=\sum_{n=1}^{\infty}b^*(g,\varphi_n)(x_n)=\{b^*(g,\varphi_n)\}_{n\in N}(\hat{x})\,,$$

т. е. $T^*g=\{b^*(g,\varphi_n)\}_{n\in N}$. Из $b_{\hat{X}^*}$-фреймовости в Z^* системы $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ получаем, что

$$\|T^*g\|_{\hat{X}^*}=\|\{b^*(g,\varphi_n)\}_{n\in N}\|_{\hat{X}^*}\ge A\|g\|,\ \forall g\in Z^*.$$

Последнее соотношение равносильно равенству $\operatorname{Im}T=Z$.

Достаточность. Пусть оператор $T:\hat{X}\to Z$, заданный по формуле (3.2.2) ограничен и $\operatorname{Im}T=Z$. Тогда $\exists A>0$ такое, что $\|T^*g\|_{\hat{X}^*}=\|\{b^*(g,\varphi_n)\}_{n\in N}\|_{\hat{X}^*}\ge A\|g\|$. Пусть число $B>0$ такое, что $\|T\|\le B$. Следовательно,

$$\|\{b^*(g,\varphi_n)\}_{n\in N}\|_{\hat{X}^*}=\|T^*g\|_{\hat{X}^*}\le\|T\|\|g\|\le B\|g\|.$$

Таким образом, $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ является $b_{\hat{X}^*}$-фреймом в Z^*. Теорема доказана.

В следующей теореме устанавливается проекционное свойство $b_{\hat{X}^*}$-фреймов.

Теорема 3.2.2. *Пусть система* $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *образует* $b_{\hat{X}^*}$*-фрейм в* Z^*. *Тогда следующие свойства эквивалентны:*

1) Существует объемлющее банахово пространство Z_1, *включающее в себя пространство* Z *в качестве замкнутого подпространства, имеющий* $t_{\hat{X}}$*-базис* $\{\psi_n^*\}_{n\in N} \subset L(X, Z_1)$, *где* $t(x,\psi^*) = \psi^*(x)$, *и* $P \in L(Z_1, Z)$ *- проектор такой, что* $P\psi_n^*(x) = b(x,\varphi_n)$, *для* $\forall x \in X$, $n \in N$;

2) Подпространство $\hat{N} = \left\{ \hat{x} = \{x_n\}_{n\in N} \in \hat{X} : \sum_{n=1}^{\infty} b(x_n,\varphi_n) = 0 \right\}$ *дополняемо в* $\hat{X}$;

3) Существует $\hat{X}$*-бесселева система* $\{\varphi_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z, X)$ *такая, что для любого* $z \in Z$ *выполняется равенство*

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z),\varphi_n). \tag{3.2.3}$$

Доказательство. Сначала установим равносильность условий 1) и 2). Пусть выполнено условие 1). Обозначим через J изоморфизм между $\hat{X}$ и Z_1, т. е. $J(\hat{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^*(x_n)$, $\forall \hat{x} = \{x_n\}_{n\in N} \in \hat{X}$. Ясно, что $\hat{M} = J^{-1}(Z)$ является замкнутым подпространством $\hat{X}$. Покажем, что $\hat{X} = \hat{M} \oplus \hat{N}$. Возьмем $\forall \hat{x} = \{x_n\}_{n\in N} \in \hat{X}$. Положим $z = T(\hat{x})$, где оператор T определен по формуле (3.2.2), и значит $z = \sum_{n=1}^{\infty} b(x_n,\varphi_n)$. Пусть $\hat{x}_1 = J^{-1}(z)$ и $\hat{x}_2 = \hat{x} - \hat{x}_1$. Тогда

$$T\hat{x}_2 = T(\hat{x} - \hat{x}_1) = T\hat{x} - T\hat{x}_1 = z - z = 0,$$

т. е. то $\hat{x}_2 \in \hat{N}$. Следовательно, $\hat{x} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$. В силу произвольности $\hat{x} \in \hat{X}$ получаем, что $\hat{X} = \hat{M} + \hat{N}$. Пусть теперь $\hat{x} \in \hat{M} \cap \hat{N}$. Из $\hat{x} \in \hat{N}$ следует, что $T\hat{x} = 0$. Пусть $J(\hat{x}) = z$. С другой стороны, из $\hat{x} \in \hat{M}$ получаем, что $z \in Z$. Следовательно, $z = P(z) = PJ(\hat{x}) = T(\hat{x}) = 0$. Поэтому $\hat{x} = J^{-1}(z) = 0$. Таким образом, $\hat{X} = \hat{M} \oplus \hat{N}$, т. е. выполняется условие 2). Пусть выполнено условие 2), т. е. $\hat{N}$ дополняемо в $\hat{X}$ и имеет место равенство $\hat{X} = \hat{M} \oplus \hat{N}$. Обозначим через $Z_1 = Z \oplus \hat{N}$. Очевидно, что Z_1 является банаховым пространством по норме

$$\|<z;\hat{x}>\|_{Z_1} = \max\left\{\|z\|_Z, \|\hat{x}\|_{\hat{X}}\right\}, \ <z;\hat{x}>\in Z_1.$$

Пусть P - оператор проектирования Z_1 на Z, т. е. $P(<z;\hat{x}>)=z$, $<z;\hat{x}>\in Z_1$, а Q - оператор проектирования $\hat{X}$ на $\hat{M}$ вдоль $\hat{N}$. Рассмотрим оператор $J:\hat{X}\to Z_1$ по формуле $J(\hat{x})=<T(\hat{x});\hat{x}-Q(\hat{x})>$, $\hat{x}\in\hat{X}$. Очевидно, что $J\in L(\hat{X},Z_1)$. Более того, J является изоморфизмом пространств $\hat{X}$ и Z_1. На самом деле, если $J(\hat{x})=0$, то $T(\hat{x})=0$ и $\hat{x}=Q(\hat{x})$, т. е. $\hat{x}\in\hat{M}\cap\hat{N}$. Поэтому $\hat{x}=0$, и значит, оператор J обратим. Для $\forall<z;\hat{x}>\in Z_1$ в силу $\operatorname{Im}T=Z$ следует, что существует $\hat{\xi}\in\hat{X}$ такой, что $T(\hat{\xi})=z$. Обозначим через $\hat{\eta}=\hat{\xi}-\hat{x}$. Тогда из $\hat{\eta}\in\hat{M}$ следует, что, $\hat{\eta}=Q(\hat{\xi})$. Следовательно, $<z;\hat{x}>=<T(\hat{\xi});\hat{\xi}-Q(\hat{\xi})>=J(\hat{\xi})$. Таким образом, $\operatorname{Im}J=Z_1$. По теореме Банаха об обратном операторе оператор J ограниченно обратим. Положим $\psi_n^*(x)=J(\{\delta_{nk}x\}_{k\in N})$, $x\in X$. Тогда $\psi_n^*\in L(X,Z_1)$ и для $\forall z_1\in Z_1$ имеет место однозначное разложение,

$$z_1=J(\hat{x})=J\left(\sum_{n=1}^{\infty}\{\delta_{nk}x_k\}_{k\in N}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}J(\{\{\delta_{nk}x_k\}_{k\in N}\}=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^*(x_n).$$

Пусть P - оператор проектирования Z_1 на Z. Тогда $T=PJ$ и

$$P\psi_n^*(x)=PJ(\{\delta_{nk}x\}_{k\in N})=T(\{\delta_{nk}x\}_{k\in N})=b(x,\varphi_n).$$

Следовательно, выполняется условие 1).

Теперь установим равносильность условий 2) и 3). Пусть выполнено условие 2), т. е. $\hat{N}$ дополняемо в $\hat{X}$ и имеет место равенство $\hat{X}=\hat{M}\oplus\hat{N}$. Обозначим через T_1 сужение оператора T на $\hat{M}$. Поскольку $KerT_1=\{0\}$ и $\operatorname{Im}T_1=\operatorname{Im}T=Z$, оператор T_1 ограниченно обратим. Определим оператор $\varphi_n^*:Z\to X$, $n\in N$, по формуле $\varphi_n^*(z)=(T_1^{-1}(z))_n$, $z\in Z$. Ясно, что $\varphi_n^*\in L(Z,X)$. Для $\forall z\in Z$ имеем $\{\varphi_n^*(z)\}=T_1^{-1}(z)\in\hat{X}$, т. е. $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$ - $\hat{X}$-бесселева в Z. Также имеем

$$z=T(T_1^{-1}(z))=\sum_{n=1}^{\infty}b(\varphi_n^*(z),\varphi_n),$$

т. е. справедливо условие 3). Пусть теперь имеет место условие 3). Возьмем произвольный $\hat{x}=\{x_n\}_{n\in N}\in\hat{X}$. Обозначим через $z=T(\hat{x})$. Из равенства (3.2.3) следует, что $z = T(\{\varphi_n^*(z)\}_{n\in N})$. Следовательно, $T(\hat{x} - \{\varphi_n^*(z)\}_{n\in N}) = 0$. Отсюда получаем, $\hat{x} - \{\varphi_n^*(z)\}_{n\in N} \in \hat{N}$, и значит, $\hat{N}$ дополняемо в $\hat{X}$. Таким образом, условия 2) и 3) равносильны. Теорема доказана.

В следующей теореме находится условия, когда последовательность коэффициентов при разложении по $b_{\hat{X}^*}$-фрейму имеет наименьшую $\hat{X}$-норму.

Теорема 3.2.3. *Пусть система* $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *образует* $b_{\hat{X}^*}$*-фрейм в* Z^*. *Тогда следующие свойства эквивалентны:*

1) Подпространство $\hat{N}$ *дополняемо в* $\hat{X}$ *и* $\|P\| = 1$*, где* P *- оператор проектирования* $\hat{X}$ *на дополнение* $\hat{N}$*;*

2) Существует $\hat{X}$*-бесселева система* $\{\varphi_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z, X)$ *такая, что для любого* $z \in Z$ *выполняется равенство* $z = \sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z), \varphi_n)$ *и*

$$\left\|\{\varphi_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} \leq \left\|\{x_n\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}},$$

для любого $\hat{x} = \{x_n\}_{n\in N} \in \hat{X}$ *:* $z = \sum_{n=1}^{\infty} b(x_n, \varphi_n)$.

Доказательство. Пусть выполнено условие 1), т. е. пусть $\hat{X} = \hat{M} \oplus \hat{N}$, оператор P проектирует $\hat{X}$ на $\hat{M}$ и $\|P\| = 1$. Возьмем $\forall z \in Z$. Пусть $\hat{x} = \{x_n\}_{n\in N} \in \hat{X}$ такой, что $z = \sum_{n=1}^{\infty} b(x_n, \varphi_n)$. По Теореме 3.2.2 существует $\hat{X}$-бесселева система $\{\varphi_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z, X)$ такая, что выполняется равенство $z = \sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z), \varphi_n)$. Отсюда следует, что $\hat{x} - \{\varphi_n^*(z)\}_{n\in N} \in \hat{N}$. Следовательно, $\{\varphi_n^*(z)\}_{n\in N} \in \hat{M}$. Имеем

$$\left\|\{\varphi_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} = \left\|P(\{x_n\}_{n\in N})\right\|_{\hat{X}} \leq \left\|\{x_n\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}},$$

т. е. справедливо условие 2).

Наоборот, пусть выполнено условие 2). В силу Теоремы 3.3.2 подпространство $\hat{N}$ дополняемо в $\hat{X}$. Пусть $\hat{X} = \hat{M} \oplus \hat{N}$ и P - оператор проектирования $\hat{X}$ на $\hat{M}$. Возьмем произвольный $\hat{x} = \{x_n\}_{n\in N} \in \hat{X}$. Обозначим через $z = T(\hat{x})$. Так как $z = T(\{\varphi_n^*(z)\}_{n\in N})$, то $\hat{x} - \{\varphi_n^*(z)\}_{n\in N} \in \hat{N}$ и $P(\hat{x}) = \{\varphi_n^*(z)\}_{n\in N}$. Поэтому

$$\|P(\hat{x})\|_{\hat{X}} = \left\|\{\varphi_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} \le \|\hat{x}\|_{\hat{X}} .$$

Отсюда следует, что $\|P\| = 1$, т. е. выполнено условие 1). Теорема доказана.

3.3. $\hat{X}$-фреймы и их сопряженные системы в банаховых пространствах

Пусть X, Z - банаховы пространства и $\hat{X}$ - CB-пространство последовательностей из векторов X.

Следующее понятие является обобщением фреймов в банаховых пространствах относительно пространства векторнозначных последовательностей.

Определение 3.3.1. *Систему $\{g_k\}_{k\in N} \subset L(Z, X)$ назовем $\hat{X}$-фреймом в Z, если существуют постоянные $A > 0$ и $B > 0$:*

$$A\|z\|_Z \le \left\|\{g_k(z)\}_{k\in N}\right\|_{\hat{X}} \le B\|z\|_Z,\ \forall z \in Z .$$

Постоянные A и B назовем $\hat{X}$-фреймовыми границами $\{g_k\}_{k\in N}$.

Имеет место следующая

Теорема 3.3.1. *Пусть задана система $\{\Lambda_k\}_{k\in N} \subset L(X, Z)$. Тогда $\{\Lambda_k\}_{k\in N}$ является $\hat{X}^*$-бесселевой в Z^* с границей B, тогда и только тогда, когда определен линейный ограниченный оператор $\Lambda : \hat{X} \to Z$ по формуле*

$$\Lambda(\hat{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k(x_k),\ \hat{x} = \{x_n\}_{n\in N} \quad и \quad \|\Lambda\| \le B. \tag{3.3.1}$$

Доказательство. Пусть $\{\Lambda_k\}_{k\in N}$ является $\hat{X}^*$-бесселевой в Z^* с границей B, т. е. $\forall f \in Z^*$ выполняется неравенство $\left\|\{\Lambda_k^* f\}_{k\in N}\right\|_{\tilde{X}^*} \le B\|f\|_{Z^*}$. Сначала докажем сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k(x_k)$ при любом $\hat{x} = \{x_n\}_{n\in N}$. При $n > m$ имеем

$$\left\|\sum_{k=m}^{n}\Lambda_k(x_k)\right\|_Z=\sup_{\|f\|=1}\left|\sum_{k=m}^{n}f(\Lambda_k(x_k))\right|=\sup_{\|f\|=1}\left|\sum_{k=m}^{n}\Lambda_k^* f(x_k)\right|\le B\left\|\sum_{k=m}^{n}\{\delta_{ik}x_k\}_{i\in N}\right\|_{\hat{X}}.$$

Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k(x_k)$ сходится, и значит, определен линейный оператор $\Lambda(\hat{x})=\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k(x_k)$, $\hat{x}=\{x_n\}_{n\in N}$. Из последнего соотношения следует, что $\|\Lambda(\hat{x})\|_Z\le B\|\hat{x}\|_{\hat{X}}$, т. е. $\|\Lambda\|\le B$.

Обратно, пусть определен ограниченный оператор $\Lambda:\hat{X}\to Z$ по формуле (3.3.1) и $\|\Lambda\|\le B$. Тогда $\forall f\in Z^*$ имеем

$$\Lambda^* f(\hat{x})=f(\Lambda(\hat{x}))=\sum_{k=1}^{\infty}f(\Lambda_k(x_k))=\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k^* f(x_k).$$

Отсюда следует, что $\{\Lambda_k^* f\}_{k\in N}=\Lambda^*(f)\in\hat{X}^*$ и $\left\|\{\Lambda_k^* f\}_{k\in N}\right\|_{\hat{X}^*}=\|\Lambda^*(f)\|\le\|\Lambda\|\|f\|_{Z^*}\le B\|f\|_{Z^*}$, $\forall f\in Z^*$. Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующий критерий $\hat{X}$-бесселевости систем.

Теорема 3.3.2. *Пусть $\hat{X}$ - рефлексивное CB-пространство и $\{g_k\}_{k\in N}\subset L(Z,X)$. Тогда $\{g_k\}_{k\in N}$ является $\hat{X}$-бесселевой в Z с границей B тогда и только тогда, когда определен ограниченный оператор $T:\hat{X}^*\to Z^*$:*

$$T(\hat{x}^*)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k^* g_k,\ \forall\hat{x}^*=\{x_k^*\}_{k\in N}\in\hat{X}^*,\quad \text{и}\quad \|T\|\le B. \tag{3.3.2}$$

Очевидно, что система $\{g_k\}_{k\in N}$ является $\hat{X}$-фреймом в Z тогда и только тогда, когда оператор $U:Z\to\hat{X}$ данный по формуле

$$U(z)=\{g_k(z)\}_{k\in N},\ \forall z\in Z \tag{3.3.3}$$

ограничен и имеет ограниченную обратную на $\mathrm{Im}U$.

Следующая теорема устанавливает критерий $\hat{X}$-фреймовости.

Теорема 3.3.3. *Пусть $\hat{X}$ - рефлексивное CB-пространство, Z - рефлексивно и система $\{g_k\}_{k\in N}\subset L(Z,X)$. Тогда $\{g_k\}_{k\in N}$ образует $\hat{X}$-фрейм в Z тогда и только тогда, когда оператор $T:\hat{X}^*\to Z^*$, определенный по формуле (3.3.2), является линейным ограниченным сюръективным оператором.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{g_k\}_{k\in N}$ образует $\hat{X}$-фрейм в Z с границами A и B. Тогда по Теореме 3.3.2 определен оператор $T:\hat{X}^*\to Z^*$ по формуле (3.3.2) и $\|T\|\le B$. Так как $\{g_k\}_{k\in N}$ является $\hat{X}$-фреймом в Z, то оператор U, заданный по формуле (3.3.3), изоморфно отображает Z на $\mathrm{Im}U$. Поэтому оператор U^* сюръективен. Справедливо равенство $T=U^*$. Действительно, $\forall\hat{x}^*\in\hat{X}^*$ и $\forall z\in Z$ получаем

$$\hat{x}^*(U(z))=\sum_{k=1}^{\infty}x_k^*g_k(z)=T(\hat{x}^*)(z).$$

Значит оператор T сюръективен.

Достаточность. Пусть по формуле (3.3.2) определен линейный ограниченный оператор T. Тогда по Теореме 3.3.2 система $\{g_k\}_{k\in N}$ $\hat{X}$-бесселева в Z и оператор U заданный по формуле (3.3.3) ограничен. Поскольку $U^*=T$, U^* отображает $\hat{X}^*$ на Z^*. Следовательно, $\exists A>0$: $\|U(z)\|_{\hat{X}}\ge A\|z\|_Z$, т. е. $\{g_k\}_{k\in N}$ образует $\hat{X}$-фрейм в Z. Теорема доказана.

Следующее понятие является обобщением банаховых фреймов относительно векторнозначных последовательностей.

Определение 3.3.2. *Пусть даны система $\{g_n\}_{n\in N}\subset L(Z,X)$ и линейный оператор $S:\hat{X}\to Z$. Пара $(\{g_n\}_{n\in N},S)$ называется банаховым $\hat{X}$-фреймом в Z, если выполнены условия*

1) $\{g(z)\}_{n\in N}\in\hat{X}$ для любого $z\in Z$;

2) существуют числа $A>0,B>0$: $A\|z\|_Z\le\left\|\{g_n(z)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}}\le B\|z\|_Z$, $z\in Z$;

3) оператор S ограничен на $\hat{X}$ и $S(\{g_n(z)\}_{n\in N})=z$, $z\in Z$.

Постоянные A и B называются границами для $(\{g_n\}_{n\in N},S)$, а S называется восстанавливающим оператором.

В следующей теореме устанавливаются эквивалентные условия, при которых $\hat{X}$-фрейм имеет оператор восстанавливания.

Теорема 3.3.4. *Пусть* $\{g_n\}_{n\in N} \subset L(Z,X)$ *является* $\hat{X}$*-фреймом в* Z *и оператор* $U \in L(Z,\hat{X})$ *определен по формуле (3.3.3). Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathrm{Im}U$ *дополняемо в* $\hat{X}$*;*

2) оператор $U^{-1}:\mathrm{Im}U \to Z$ *может быть продолжен до ограниченного оператора на все* $\hat{X}$*;*

3) существует ограниченный оператор $S \in L(\hat{X},Z)$ *такой, что пара* $(\{g_n\}_{n\in N},S)$ *образует банаховый* $\hat{X}$*-фрейм в* Z.

4) существует $\hat{X}^*$*-бесселевая в* Z^* *система* $\{\Lambda_k\}_{k\in N} \subset L(X,Z)$*:*

$$z=\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k g_k(z),\ z\in Z.$$

Доказательство. Пусть $\mathrm{Im}U$ дополняемо в $\hat{X}$. Обозначим через P оператор проектирования $\hat{X}$ на $\mathrm{Im}U$. Рассмотрим оператор $S=U^{-1}P$. Тогда $S\in L(\hat{X},Z)$ и $S(\hat{x})=U^{-1}(\hat{x})$, $\hat{x}\in\mathrm{Im}U$, т. е. оператор S является ограниченным продолжением оператора U^{-1} на все $\hat{X}$. Наоборот, пусть оператор U^{-1} продолжается ограниченным оператором S на все $\hat{X}$. Определим оператор $P=US$. Имеем $P^2=USUS=US=P$, т. е. P - оператор проектирования $\hat{X}$ на $\mathrm{Im}U$, и значит $\mathrm{Im}U$ дополняемо в $\hat{X}$. Следовательно, условия 1) и 2) равносильны.

Покажем равносильность условий 1) и 3). Пусть оператор S является ограниченным продолжением оператора U^{-1} на все $\hat{X}$. Тогда для $\forall z\in Z$ имеем

$$S(\{g(z)\}_{n\in N})=SU(z)=z,$$

т. е. пара $(\{g_n\}_{n\in N},S)$ образует банаховый $\hat{X}$-фрейм в Z. Обратно, предположим, что $\hat{X}$-фрейм $\{g_n\}_{n\in N}$ имеет оператор восстанавливания $S\in L(\hat{X},Z)$. Тогда для $\forall\hat{x}\in\mathrm{Im}U$ имеем

$$S(\hat{x})=S\big(U(U^{-1}(\hat{x}))\big)=U^{-1}(\hat{x}),$$

т. е. S является ограниченным продолжением оператора U^{-1} на все $\hat{X}$.

Теперь установим эквивалентности условий 3) и 4). Пусть $(\{g_n\}_{n\in N}, S)$ образует банаховый $\hat{X}$-фрейм в Z. Определим оператор $\Lambda_k : X \to Z$ по равенству $\Lambda_k(x) = S(\{\delta_{nk}x\}_{n\in N})$, $x \in X$. Ясно, что $\{\Lambda_k\}_{k\in N} \subset L(X,Z)$. Имеем

$$\Lambda_k^* f(x) = f(\Lambda_k(x)) = f(S(\{\delta_{nk}x\}_{n\in N})) = S^* f(\{\delta_{nk}x\}_{n\in N}) .$$

Отсюда следует, что $\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^* f(x_k) = S^* f(\hat{x})$, $\forall \hat{x} = \{x_k\}_{k\in N} \in \hat{X}$, т. е. для любого $f \in Z^*$ получаем $\{\Lambda_k^* f\}_{k\in N} = S^* f \in \hat{X}^*$. Следовательно, $\{\Lambda_k\}_{k\in N}$ является $\hat{X}^*$-бесселевой в Z^*. С другой стороны, для любого $z \in Z$ получим

$$z = S(\{g_k(z)\}_{k\in N}) = \sum_{k=1}^{\infty} S(\{\delta_{ik} g_k(z)\}_{i\in N}) = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k(g_k(z)).$$

Обратно, пусть существует $\hat{X}^*$-бесселевая в Z^* система $\{\Lambda_k\}_{k\in N} \subset L(X,Z)$ такая, что справедливо 4). По Теореме 3.3.1 оператор $\Lambda(\hat{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k(x_k)$, $\hat{x} = \{x_n\}_{n\in N}$ ограничен. Для $\forall z \in Z$ имеем

$$\Lambda U(z) = \Lambda(\{g_i(z)\}_{i\in N}) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_k(g_k(z)) = z .$$

Таким образом, оператор Λ является непрерывным продолжением U^{-1}. Из равносильности условий 2) и 3) следует, что имеет место 3). Следовательно, условия 3) и 4) равносильны. Теорема доказана.

Следующее понятие является обобщением понятия дуального фрейма.

Определение 3.3.3. *Пусть система $\{g_k\}_{k\in N} \subset L(Z,X)$ является $\hat{X}$-фреймом в Z. $\hat{X}^*$-бесселевую в Z^* систему $\{\Lambda_k\}_{k\in N} \subset L(X,Z)$ назовем сопряженной к $\{g_k\}_{k\in N}$, если выполнено условие:* $z = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k g_k(z)$, $\forall z \in Z$.

Из Теоремы 3.3.4. непосредственно следует следующая

Теорема 3.3.5. *Пусть $\{g_k\}_{k\in N} \subset L(Z,X)$ является $\hat{X}$-фреймом в Z. Тогда $\{g_k\}_{k\in N}$ имеет сопряженную систему тогда и только тогда, когда существует ограниченный правый обратный к U.*

3.4. О связи $\hat{X}$-фреймов с $\hat{X}$-Рисс базисами в банаховых пространствах

Пусть X, Y и Z - банаховы пространства с соответствующими нормами $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ и $\|\cdot\|_Z$, $b(x,y): X \times Y \to Z$ - билинейное отображение удовлетворяющее условию (3.1.1). Пусть $\hat{X}$ - CB-пространство и $\{g_k\}_{k\in N} \subset L(Z,X)$.

Следующее понятие является обобщением понятия базиса Рисса.

Определение 3.4.1. *Система* $\{g_k\}_{k\in N} \subset L(Z,X)$ *называется* $\hat{X}^*$*-Рисс* g*-базисом в* Z^**, если* $\{g_k\}_{k\in N}$ g*-полна в* Z^* *и существуют* $A>0$ *и* $B>0$*:*

$$A\|\hat{x}^*\|_{\hat{X}^*} \le \left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k^* g_k\right\|_{Z^*} \le B\|\hat{x}^*\|_{\hat{X}^*},\ \forall \hat{x}^* = \{x_n^*\}_{n\in N} \in \hat{X}^*. \tag{3.4.1}$$

Постоянные A *и* B *называются нижней и верхней границами* $\{g_k\}_{k\in N}$.

Из определения следует, что система $\{\Lambda_k\}_{k\in N} \subset L(X,Z)$ становится $\hat{X}$-Рисс Λ-базисом в Z, если $\{\Lambda_k\}_{k\in N}$ Λ-полна в Z и существуют $A>0$ и $B>0$:

$$A\|\hat{x}\|_{\hat{X}} \le \left\|\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k(x_k)\right\|_{Z} \le B\|\hat{x}\|_{\hat{X}},\ \forall \hat{x} = \{x_n\}_{n\in N} \in \hat{X}. \tag{3.4.2}$$

Замечания 3.4.1. *Система* $\{g_k\}_{k\in N}$ *образует* $\hat{X}^*$*-Рисс* g*-базис в* Z *тогда и только тогда, когда оператор* $T:\hat{X}^* \to Z^*$ *определенный по формуле (3.3.2) ограничен и ограниченно обратим.*

Имеет место следующий критерий $\hat{X}^*$-Рисс g-базисности систем.

Теорема 3.4.1. *Пусть* $\hat{X}$*-рефлексивное* CB*-пространство, и* Z *- рефлексивно. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\{g_k\}_{k\in N}$ *-* $\hat{X}^*$*-Рисс* g*- базис в* Z^* *с границами* A *и* B*;*

2) $\{g_k\}_{k\in N}$ *-* $\hat{X}$*-фрейм в* Z *с границами* A*,* B*, и* g*-минимальна в* Z^**;*

3) $\{g_k\}_{k\in N}$ *-* g*-полна, одновременно* $\hat{X}$*-бесселева и* $\hat{X}$*-гильбертова в* X*.*

Доказательство. Пусть имеет место 1). В силу замечания 3.4.1 оператор T, заданный по формуле (3.3.2), изоморфно отображает $\hat{X}^*$ на Z^*. Тогда по Теореме 3.3.3 система $\{g_k\}_{k\in N}$ является $\hat{X}$-фреймом в Z. В силу рефлексивности

Z и $\hat{X}$ имеем $T^* = U$. Так как $\mathrm{Im} T^* = \hat{X}$, то $\mathrm{Im} U = \hat{X}$. Ясно, что $B = \|T\|$ и $A = \|T^{-1}\|^{-1}$. Поскольку $\{g_k\}_{k \in N}$ имеет границы $\|U^{-1}\|^{-1}$ и $\|U\|$, то $\|U^{-1}\|^{-1} = \|(T^*)^{-1}\|^{-1} = \|T^{-1}\|^{-1} = A$ и $\|U\| = \|T^*\| = \|T\| = B$, т. е. $\hat{X}$-фрейм $\{g_k\}_{k \in N}$ имеет границы A и B.

Положим $\Lambda_k(x) = U^{-1}(\{\delta_{nk} x\}_{n \in N})$, $k \in N$, $\forall x \in X$. Для $\forall n, k \in N$ и $\forall x \in X$ имеем

$$g_n(\Lambda_k(x)) = g_n(U^{-1}(\{\delta_{ik} x\}_{i \in N})) = T^{-1}(g_n)(\{\delta_{ik} x\}_{i \in N}) = \delta_{nk} x,$$

т. е. системы $\{g_n\}_{n \in N}$ и $\{\Lambda_n\}_{n \in N}$ g-биортогональны. Следовательно, система $\{g_n\}_{n \in N}$ g-минимальна в Z^*, и тем самым справедливо 2).

Предположим, что имеет место условие 2), т. е. $\{g_n\}_{n \in N}$ g-минимальна в Z^* и образует $\hat{X}$-фрейм в Z. Тогда $\{g_n\}_{n \in N}$ является g-полной в Z^* и $\hat{X}$-бесселевой в Z. По Теореме 3.3.3 оператор T отображает $\hat{X}^*$ на Z^*. Очевидно, что из g-минимальности в Z^* системы $\{g_n\}_{n \in N}$ следует, что $\ker T = \{0\}$. Следовательно, оператор T ограниченно обратим. По Теореме 1.5.4 система $\{g_n\}_{n \in N}$ является $\hat{X}$-гильбертовой в Z. Значит из условия 2) следует условие 3).

Пусть выполнено условие 3). Из Теорем 1.5.2 и 1.5.4 следует неравенство (3.4.1). Поскольку система $\{g_n\}_{n \in N}$ g-полна в Z^*, то система $\{g_n\}_{n \in N}$ образует $\hat{X}^*$-Рисс g-базис в Z^*, т. е. имеет место 1). Теорема доказана.

В следующей теореме даются эквивалентные условия $\hat{X}^*$-Рисс g-базисности для $\hat{X}$-фрейма.

Теорема 3.4.2. *Пусть $\hat{X}$-рефлексивное CB-пространство, система $\{g_k\}_{k \in N} \subset L(Z, X)$ образует $\hat{X}$-фрейм в Z. Тогда следующие условия эквивалентны:*

i) $\{g_k\}_{k \in N}$ - $\hat{X}^*$-Рисс g-базис в Z^*;

ii) $\{g_k\}_{k \in N}$ - g-базис в Z^*;

iii) $\{g_k\}_{k \in N}$ - g-ω-линейно независима относительно $\hat{X}^*$;

iv) $\mathrm{Im} U = \hat{X}$, где оператор $U : Z \to \hat{X}$ определен по формуле (3.3.3);

v) $\{g_k\}_{k\in N}$ *имеет единственную* g*-биортогональную* $\{\Lambda_k\}_{k\in N} \subset L(X,Z)$.

Доказательство. Согласно $\hat{X}$-фреймовости системы $\{g_k\}_{k\in N}$ по Теореме 3.3.3 оператор T заданный по формуле (3.3.2) отображает $\hat{X}^*$ на все Z^*. Ясно, что каждом из этих условий равносильно ограниченной обратимости T. В условиях i) – iii) оператор T ограниченно обратим. Пусть выполнено условие iv). Тогда оператор U ограниченно обратим и из $U^* = T$ следует ограниченная обратимость T. Предположим, что имеет место v). Тогда система $\{g_k\}_{k\in N}$ g-минимальна, и, следовательно, по Теореме 3.4.3 условия i) и v) равносильны. Теорема доказана.

Справедлива следующая

Теорема 3.4.3. *Пусть* $\hat{X}$ *- рефлексивное* CB*-пространство, система* $\{g_k\}_{k\in N} \subset L(Z,X)$ *образует* $\hat{X}^*$*-Рисс* g*-базис в* Z^* *с границами* A *и* B*. Тогда* $\{g_k\}_{k\in N}$ *имеет единственную* g*-биортогональную систему* $\{\Lambda_k\}_{k\in N} \subset L(X,Z)$ *такая, что* $\{\Lambda_k\}_{k\in N}$ *образует* $\hat{X}$*-Рисс* Λ*-базис в* Z^* *с границами* $\frac{1}{B}$ *и* $\frac{1}{A}$ *и справедливы равенства*

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k(g_k(z)),\ \forall z \in Z, \tag{3.4.3}$$

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f\Lambda_k g_k,\ \forall f \in Z^*. \tag{3.4.4}$$

Доказательство. В силу Теоремы 3.4.2 система $\{g_k\}_{k\in N}$ является $\hat{X}$-фреймом в Z с границами A и B. По Теореме 3.4.3 оператор U ограниченно обратим и $\{g_k\}_{k\in N}$ имеет единственную g-биортогональную систему $\{\Lambda_k\}_{k\in N} \subset L(X,Z)$ заданная по формуле $\Lambda_k(x) = U^{-1}(\{\delta_{ik}x\}_{i\in N})$. Имеем $z = U^{-1}U(z) = U^{-1}(\sum_{k=1}^{\infty}\{\delta_{ik}g_k(z)\}_{i\in N}) = \sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k(g_k(z))$. Отсюда следует, что оператор $\Lambda : \hat{X} \to Z$ ограничен и $\operatorname{Im}\Lambda = Z$. Имеем

$$\left\|\{\Lambda_k^*(f)\}_{k\in N}\right\|_{\hat{X}^*} = \sup_{\|\hat{x}\|=1}\left|\sum_{k=1}^{\infty} f\Lambda_k(x_k)\right| = \sup_{\|\hat{x}\|=1}\left|f(U^{-1}(\hat{x}))\right| = \left\|(U^*)^{-1} f\right\|_{\hat{X}^*}.$$

Поэтому

$$\left\|\{\Lambda_k^* f\}_{k\in N}\right\|_{\hat{X}^*} \le \left\|U^{-1}\right\|\|f\|_{Z^*} \le \frac{1}{A}\|f\|,$$

$$\left\|\{\Lambda_k^* f\}_{k\in N}\right\|_{\hat{X}^*} \ge \|U\|^{-1}\|f\| \ge \frac{1}{B}\|f\|,$$

т. е. $\{\Lambda_k\}_{k\in N}$ является $\hat{X}^*$-фреймом в Z^* с границами $\frac{1}{B}$ и $\frac{1}{A}$. Из g-биортогональности $\{\Lambda_k\}_{k\in N}$ следует, что если $\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k(x_k)=0$, то $x_k=0$, $k\in N$. Следовательно, оператор Λ ограниченно обратим и тем самым $\{\Lambda_k\}_{k\in N}$ образует $\hat{X}$-Рисс Λ-базис в Z с границами $\frac{1}{B}$ и $\frac{1}{A}$. Теорема доказана.

Также справедлива следующая

Теорема 3.4.4. *Пусть $\hat{X}$- CB-пространство и система $\{g_k\}_{k\in N}\subset L(Z,X)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

i) $\{g_k\}_{k\in N}$ - $\hat{X}^*$-Рисс g-базис в Z^*;

ii) $\{g_k\}_{k\in N}$ - g-полна в Z^* и $\hat{X}$-бесселева в Z и имеет g-биортогональную $\hat{X}^*$-бесселевую в Z^* систему $\{\Lambda_k\}_{k\in N}\subset L(X,Z)$.

Доказательство. Пусть выполнено условие i). Тогда по Теореме 3.4.4 $\{g_k\}_{k\in N}$ имеет g-биортогональную систему $\{\Lambda_k\}_{k\in N}$ образующая $\hat{X}$-Рисс Λ-базис в Z. Применяя Теорему 3.4.1, получаем, что $\{\Lambda_k\}_{k\in N}$ является $\hat{X}^*$-фреймом в Z^*, т. е. имеет место ii).

Обратно, пусть имеет место ii). Тогда по Теоремам 3.3.1 и 3.3.2 определены ограниченные операторы $\Lambda:\hat{X}\to Z$ по формуле (3.3.1) и $T:\hat{X}^*\to Z^*$ по формуле (3.3.2). Имеем

$$T(\hat{x}^*)(\Lambda(\hat{x})) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^*\left(\sum_{i=1}^{\infty} g_k(\Lambda_i x_i)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^*(x_k) = \hat{x}^*(\hat{x}).$$

Следовательно,

$$\left\|\hat{x}^*\right\|_{\hat{X}} = \sup_{\|\hat{x}\|=1}\left|\hat{x}^*(\hat{x})\right| = \sup_{\|\hat{x}\|=1}\left|T(\hat{x}^*)(\Lambda(\hat{x}))\right| \le \left\|T(\hat{x}^*)\right\|\|\Lambda\|$$

Таким образом,

$$\|\Lambda\|^{-1}\|\hat{x}^*\|_{\hat{X}^*} \le \|T(\hat{x}^*)\|_{Z^*} \le \|T\|\|\hat{x}^*\|_{\hat{X}^*}.$$

Значит $\{g_k\}_{k\in N}$ образует $\hat{X}^*$-Рисс g-базис в Z^*. Теорема доказана.

Пример 3.4.1. Пусть $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, система $\{\varphi_n(t)\}_{n\in N}$ такая, что $|\varphi_n(t)|\le M$ п. в. на $[0,1]$ и $\lambda_{n_0}\ne 0$, где $\lambda_n=\inf\limits_{t\in[0;1]} vrai|\varphi_n(t)|$. Обозначим через $l_{p,2}(0,1)$ множество последовательностей $a(t)=\{a_n(t)\}_{n\in N}\subset L_p(0,1)$ с конечной нормой

$$\|a\|_{p,2}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^1|a_n(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Сопряженное пространство к $l_{p,2}(0,1)$ изометрично и изоморфно к $l_{q,2}(0,1)$ и

$$b(a)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^1 a_n(t)b_n(t)dt,\ b(t)=\{b_n(t)\}_{n\in N}\in l_{q,2}(0,1),$$

линейный непрерывный функционал на $l_{p,2}(0,1)$. Рассмотрим $\Lambda_n: L_p(0,1)\to L_p(0,1)$, $\Lambda_n(x)(t)=x(t)\varphi_n(t)$. Ясно, что $\lambda_n\|x\|_{L_p}\le\|\Lambda_n(x)\|_{L_p}\le M\|x\|_{L_p}$ и $\Lambda_n^*(y)(t)=y(t)\varphi_n(t)$, $y(t)\in L_q(0,1)$. Тогда $\{\Lambda_n\}_{n\in N}$ образует $l_{q,2}(0,1)$-фрейм и

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^q}{n^2}\right)^{\frac{1}{q}}\|y\|_{L_q(0,1)}\le\left\|\{\Lambda_n^*(y)\}_{n\in N}\right\|_{l_{q,2}(0,1)}\le M\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{\frac{1}{q}}\|y\|_{L_q(0,1)}.$$

Действительно,

$$\left\|\{\Lambda_n^*(y)\}_{n\in N}\right\|_{l_{q,2}(0,1)}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\|\Lambda_n^*(y)\|_{L_q(0,1)}^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^q}{n^2}\right)^{\frac{1}{q}}\|y\|_{L_q(0,1)}\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\|\Lambda_n^*(y)\|_{L_q(0,1)}^q\right)^{\frac{1}{q}}\le M\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{q}}\|y\|_{L_q(0,1)}.$$

Если $\lambda_n>0$, то из Теоремы 3.4.4 следует эквивалентность условий:

$a)$ $\forall x(t)\in L_p(0,1)$ имеет однозначное представление $x(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(t)\varphi_n(t)$;

$b)$ $\exists A>0, B>0$: $A\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^1|a_n(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\int_0^1\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(t)\varphi_n(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\le B\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^1|a_n(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$

3.5. b-атомарные разложения в банаховых пространствах и их нетерово возмущение

Пусть X, Y и Z − B-пространства с соответствующими нормами $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ и $\|\cdot\|_Z$. Рассмотрим билинейное отображение $b(x,y): X\times Y\to Z$, удовлетворяющее условию (3.1.1) и $b^*: Z^*\times Y\to X^*$ - билинейное отображение, заданное по выражению (1.4.4). Пусть $\hat{X}$ - CB-пространство последовательностей векторов X, $\{y_n\}_{n\in N}\subset Y$ и $\{y_n^*\}_{n\in N}\subset L(Z,X)$ - некоторые системы.

Следующее понятие является обобщением понятия атомарного разложения.

Определение 3.5.1. *Пару* $\left(\{y_n^*\}_{n\in N},\{y_n\}_{n\in N}\right)$ *назовем* b*-атомарным разложением (*$b_{\hat{X}}$-атомарным разложением) *в* Z *относительно* $\hat{X}$*, если выполнены условия:*

1) $\{y_n^*(z)\}_{n\in N}\in\hat{X}$, $\forall z\in Z$;

2) существуют числа $A>0, B>0$*:* $A\|z\|_Z\le\left\|\{y_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}}\le B\|z\|_Z$, $\forall z\in Z$;

3) Для $\forall z\in Z$ *имеет место* $z=\sum_{n=1}^{\infty}b(y_n^*(z),y_n)$.

Постоянные A и B назовем границами $b_{\hat{X}}$-атомарного разложения.

Если $\{y_n\}_{n\in N}$ является $b_{\hat{X}^*}$-фреймом в Z^* и $\left(\{y_n^*\}_{n\in N},\{y_n\}_{n\in N}\right)$ является $b_{\hat{X}}$-атомарным разложением в Z, то $\{y_n\}_{n\in N}$ будем называть альтернативным дуальными для $\{y_n^*\}_{n\in N}$.

Имеет место следующая

Теорема 1.5.1. *Пусть* $\{y_n\}_{n\in N}\subset Y$ - $b_{\hat{X}^*}$*-бесселева в* Z^*, $\{y_n^*\}_{n\in N}$ - $\hat{X}$*-бесселева в* Z *система* и $z=\sum_{n=1}^{\infty}b(y_n^*(z),y_n)$, $\forall z\in Z$. *Тогда* $\left(\{y_n^*\}_{n\in N},\{y_n\}_{n\in N}\right)$ *является* $b_{\hat{X}}$*-атомарным разложением в* Z *и* $\{y_n\}_{n\in N}$ *является альтернативным дуальным* $b_{\hat{X}^*}$*-фреймом в* Z^* *для* $\{y_n^*\}_{n\in N}$.

Доказательство. Из Теоремы 3.2.1 следует, что оператор T определенный по формуле (3.2.2) ограничен. Так как для каждого $z \in Z$ имеет место $z = \sum_{n=1}^{\infty} b(y_n^*(z), y_n)$, то T отображает $\hat{X}$ на Z. Следовательно, по Теореме 3.2.1 система $\{y_n\}_{n \in N}$ является $b_{\hat{X}^*}$-фреймом в Z^* и имеет место равенство $T^*(f) = \{b^*(f, y_n)\}_{n \in N}$. Для любого $f \in Z^*$ имеем

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(b(y_n^*(z), y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} b^*(f, y_n) y_n^*(z).$$

Отсюда следует, что $f = \sum_{n=1}^{\infty} b^*(f, y_n) y_n^*$. Пусть оператор U определен по формуле $U(z) = \{y_n^*(z)\}_{n \in N}$. Ясно, что имеет место равенство $U^*(\hat{x}^*) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* y_n^*$. Значит оператор U^* отображает $\hat{X}^*$ на Z^*. Следовательно, по Теореме 3.3.3 система $\{y_n^*\}_{n \in N}$ является $\hat{X}$-фреймом в Z. Теорема доказана.

Теорема 3.5.2. *Пусть* $\left(\{y_n^*\}_{n \in N}, \{y_n\}_{n \in N}\right)$ *является* $b_{\hat{X}}$*-атомарным разложением в* Z *с границами* A *и* B, $F \in L(Z)$ *- ограниченно обратимый оператор,* $F_b(y_n) = \varphi_n$ *и* $\varphi_n^* = y_n^* F^{-1}$. *Тогда* $\left(\{\varphi_n^*\}_{n \in N}, \{\varphi_n\}_{n \in N}\right)$ *является* $b_{\hat{X}}$*-атомарным разложением в* Z. *При этом, если* $\{y_n\}_{n \in N}$ *альтернативно дуальный* $b_{\hat{X}^*}$*-фрейм в* Z^* *для* $\{y_n^*\}_{n \in N}$, *то* $\{\varphi_n\}_{n \in N}$ *альтернативно дуальный* $b_{\hat{X}^*}$*-фрейм в* Z^* *для* $\{\varphi_n^*\}_{n \in N}$.

Доказательство. Для любого $z \in Z$ имеем

$$\left\|\{\varphi_n^*(z)\}_{n \in N}\right\|_{\hat{X}} = \left\|\{y_n^*(F^{-1}(z))\}_{n \in N}\right\|_{\hat{X}} \le B\left\|F^{-1}(z)\right\| \le B\left\|F^{-1}\right\|\|z\|_Z,$$

$$\left\|\{\varphi_n^*(z)\}_{n \in N}\right\|_{\hat{X}} = \left\|\{y_n^*(F^{-1}(z))\}_{n \in N}\right\|_{\hat{X}} \ge A\left\|F^{-1}(z)\right\| \ge A\|F\|^{-1}\|z\|_Z,$$

т. е. система $\{\varphi_n^*\}_{n \in N}$ образует $\hat{X}$-фрейм в Z. С другой стороны, для $\forall z \in Z$ согласно $z = \sum_{n=1}^{\infty} b(y_n^*(z), y_n)$ имеем

$$z = F(F^{-1}(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} F(b(y_n^*(F^{-1}(z), y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z), \varphi_n).$$

Значит $\left(\{\varphi_n^*\}_{n\in N}, \{\varphi_n\}_{n\in N}\right)$ является $b_{\hat{X}}$ -атомарным разложением в Z.

Пусть $\{y_n\}_{n\in N}$ - $b_{\hat{X}^*}$-фрейм в Z^* с границами A_1 и B_1. Для $\forall f\in Z^*$ и $\forall x\in X$

$$f(b(x,\varphi_n)) = f(F(b(x,y_n))) = F^*(f)(b(x,y_n)) = b^*(F^*(f),y_n)(x),$$

т. е. $b^*(f,\varphi_n) = b^*(F^*(f),y_n)$. Следовательно,

$$\left\|\left\{b^*(f,\varphi_n)\right\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}^*} = \left\|\left\{b^*(F^*(f),y_n)\right\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}^*} \le B_1\left\|F^*(f)\right\| \le B_1\|F\|\|f\|,$$

$$\left\|\left\{b^*(f,\varphi_n)\right\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}^*} = \left\|\left\{b^*(F^*(f),y_n)\right\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}^*} \ge A_1\left\|F^*(f)\right\| \ge A_1\left\|F^{-1}\right\|^{-1}\|f\|.$$

Таким образом, система $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ образует $b_{\hat{X}^*}$-фрейм в Z^* альтернативно дуальный к $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$. Теорема доказана.

В следующей теореме устанавливается нетерово возмущение $b_{\hat{X}}$-атомарного разложения.

Теорема 3.5.3. *Пусть* $\left(\{y_n^*\}_{n\in N}, \{y_n\}_{n\in N}\right)$ - $b_{\hat{X}}$ *-атомарное разложение в* Z *с границами* A *и* B, $F\in L(Z,Z_1)$ *нетеров оператор и* $F_b(y_n)=\psi_n$. *Тогда существует* $\{\psi_n^*\}_{n\in N}\subset L(Z_1,X)$ *такая, что* $\left(\{\psi_n^*\}_{n\in N}, \{\psi_n\}_{n\in N}\right)$ *является* $b_{\hat{X}}$ *-атомарным разложением в* $\overline{L_b\left(\{\psi_n\}_{n\in N}\right)}$. *Если* $\{y_n\}_{n\in N}$ *является альтернативным дуальным* $b_{\hat{X}}^*$ *-фреймом в* Z^* *для* $\{y_n^*\}_{n\in N}$, *то* $\{\psi_n\}_{n\in N}$ *альтернативный дуальный* $b_{\hat{X}}^*$ *-фрейм в* $Z_1^* - \ker F^*$ *для* $\{\psi_n^*\}_{n\in N}$.

Доказательство. Представим Z в виде $Z=\ker F\oplus Z_0$ и пусть F_1 является сужением F на Z_0. Тогда оператор F_1 непрерывно отображает Z_1 на $\operatorname{Im}F$, и значит ограниченно обратим. Легко показать, что $\operatorname{Im}F = \overline{L_b\left(\{\psi_n\}_{n\in N}\right)}$. Определим оператор $\psi_n^*:\operatorname{Im}F\to X$ по формуле $\psi_n^*(w)=y_n^*(F_1^{-1}(w))$, $w\in\operatorname{Im}F$. Для произвольного $w\in\operatorname{Im}F$ получаем, что $\left\{\psi_n^*(w)\right\}_{n\in N} = \left\{y_n^*(z)\right\}_{n\in N}\in\hat{X}$, где $z=F_1^{-1}(w)$. Далее, для любого $w\in\operatorname{Im}F$ имеем

$$\left\|\left\{\psi_n^*(w)\right\}\right\|_{\hat{X}} = \left\|\left\{y_n^*(F_1^{-1}(w))\right\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} \le B\left\|F_1^{-1}(w)\right\| \le B\left\|F_1^{-1}\right\|\|w\|_{Z_1},$$

$$\left\|\left\{\psi_n^*(w)\right\}\right\|_{\hat{X}} = \left\|\left\{y_n^*(F_1^{-1}(w))\right\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} \ge A\left\|F_1^{-1}(w)\right\| \ge A\|F\|^{-1}\|w\|_{Z_1}.$$

Также для $\forall w\in\operatorname{Im}F$ имеет место разложение

$$w = F(F_1^{-1}(w)) = F(\sum_{n=1}^{\infty} b(y_n^*(T_1^{-1}(w)), y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} b_1(\psi_n^*(w), \psi_n),$$

т. е. $(\{\psi_n^*\}, \{\psi_n\})$ есть $b_{\hat{X}}$ -атомарное разложение в $\overline{L_b(\{\psi_n\}_{n\in N})}$.

Пусть $\{y_n\}_{n\in N}$ - $b_{\hat{X}^*}$-фрейм в Z^* с границами A_1 и B_1. В силу нётеровости F^* подпространство $\ker F^*$ дополняемо в Z^*. Положим $Z_1^* = \ker F^* \oplus Z_2^*$. Тогда сужение $F_2^* = F^*|_{Z_2^*}$ ограниченно обратим в Z_2^*. Для $\forall f \in Z_2^*$ получим

$$\left\|\{b^*(f, \psi_n)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}^*} = \left\|\{b^*(F^*(f), y_n)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}^*} \le B_1\left\|F^*(f)\right\| \le B_1\|F\|\|f\|,$$

$$\left\|\{b^*(f, \psi_n)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}^*} = \left\|\{b^*(F^*(f), y_n)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}^*} \ge A_1\left\|F^*(f)\right\| \ge A_1\left\|F^{-1}\right\|^{-1}\|f\|.$$

Следовательно, $\{\psi_n\}_{n\in N}$ образует альтернативный дуальный $b_{\hat{X}^*}$-фрейм в $Z_1^* - \ker F^*$ для $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$. Теорема доказана.

3.6. Устойчивость $b_{\hat{X}}$ -атомарного разложения и $\hat{X}$ -фрейма в банаховых пространствах

Пусть X, Y и Z - банаховы пространства с соответствующими нормами $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ и $\|\cdot\|_Z$ соответственно, $b(x,y): X\times Y \to Z$ - билинейное отображение, удовлетворяющее условию (3.1.1), $\hat{X}$, $\hat{Y}$ - CB-пространство над X и Y соответственно. Пусть $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ и $\{\varphi_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z, X)$ - некоторые системы.

Справедлива

Теорема 3.6.1. *Пусть* $(\{\varphi_n^*\}_{n\in N}, \{\varphi_n\}_{n\in N})$ - $b_{\hat{X}}$ *-атомарное разложение в* Z *с границами* A *и* B, *и* $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *некоторая система. Предположим, что существуют числа* $\lambda, \beta, \mu \ge 0$ *такие, что*

i) $\max\{\beta; \lambda + \mu B\} < 1$;

ii) $\left\|\sum_i b(x_i, \varphi_i - \psi_i)\right\|_Z \le \lambda\left\|\sum_i b(x_i, \varphi_i)\right\|_Z + \beta\left\|\sum_i b(x_i, \psi_i)\right\|_Z + \mu\|\{x_i\}\|_{\hat{X}}$, $\forall\{x_i\} \in \hat{X}$.

Тогда существует $\{\psi_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z,X)$ *такая, что* $\left(\{\psi_n^*\}_{n\in N}, \{\psi_n\}_{n\in N}\right)$ *является* $b_{\hat{X}}$ *-атомарным разложением в* Z *с границами*

$$\frac{(1-\beta)A}{1+(\lambda+\mu B)}, \ \frac{(1+\beta)B}{1-(\lambda+\mu B)}.$$

Доказательство. Сначала докажем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z),\psi_n)$ при любом $z\in Z$. Для любых $m,p\in N$ имеем

$$\left\|\sum_{n=m+1}^{m+p} b(\varphi_n^*(z),\psi_n)\right\|_Z = \left\|\sum_{n=m+1}^{m+p} b(\varphi_n^*(z),\varphi_n) + \sum_{n=m+1}^{m+p} b(\varphi_n^*(z),\varphi_n-\psi_n)\right\|_Z \le$$

$$\le \left\|\sum_{n=m+1}^{m+p} b(\varphi_n^*(z),\varphi_n)\right\|_Z + \left\|\sum_{n=m+1}^{m+p} b(\varphi_n^*(z),\varphi_n-\psi_n)\right\|_Z \le$$

$$\le (1+\lambda)\left\|\sum_{n=m+1}^{m+p} b(\varphi_n^*(z),\varphi_n)\right\|_Z + \beta\left\|\sum_{n=m+1}^{m+p} b(\varphi_n^*(z),\psi_n)\right\|_Z + \mu\left\|\sum_{n=m+1}^{m+p}\{\delta_{in}\varphi_n^*(z)\}_{i\in N}\right\|_{\hat{X}}.$$

Последнее неравенство равносильно следующему неравенству

$$\left\|\sum_{n=m+1}^{m+p} b(\varphi_n^*(z),\psi_n)\right\|_Z \le \frac{1+\lambda}{1-\beta}\left\|\sum_{n=m+1}^{m+p} b(\varphi_n^*(z),\varphi_n)\right\|_Z + \frac{\mu}{1-\beta}\left\|\sum_{n=m+1}^{m+p}\{\delta_{in}\varphi_n^*(z)\}_{i\in N}\right\|_{\hat{X}}, \ z\in Z.$$

Отсюда, учитывая сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z),\varphi_n)$ и принадлежности $\{\varphi_n^*(z)\}_{n\in N}\in\hat{X}$ следует, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z),\psi_n)$. Определим, оператор $T:Z\to Z$ по формуле $T(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z),\psi_n)$. Используя условие ii) получим

$$\|z-T(z)\|_Z = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z),\varphi_n-\psi_n)\right\|_Z \le$$

$$\le \lambda\left\|\sum_{n=1}^{+\infty} b(\varphi_n^*(z),\varphi_n)\right\|_Z + \beta\left\|\sum_{n=1}^{+\infty} b(\varphi_n^*(z),\psi_n)\right\|_Z + \mu\left\|\{\varphi_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} \le$$

$$\le (\lambda+\mu B)\|z\|_Z + \beta\|T(z)\|.$$

Тогда из условия i) следует, что оператор T ограниченно обратим и

$$\frac{1-\beta}{1+(\lambda+\mu B)} \le \|T^{-1}\| \le \frac{1+\beta}{1-(\lambda+\mu B)}.$$

Определим оператор $\psi_n^*: Z \to X$ по формуле $\psi_n^*(z) = \varphi_n^* T^{-1}(z)$. Для $z \in Z$ имеем $\{\psi_n^*(z)\}_{n\in N} = \{\varphi_n^*(T^{-1}(z))\}_{n\in N} \in \hat{X}$. Далее,

$$\left\|\{\psi_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} \le B\left\|T^{-1}(z)\right\|_Z \le \frac{(1+\beta)B}{1-(\lambda+\mu B)}\|z\|_Z,$$

$$\left\|\{\psi_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} \ge A\left\|T^{-1}(z)\right\|_Z \ge \frac{(1-\beta)A}{1+(\lambda+\mu B)}\|z\|_Z.$$

Наконец, для $\forall z \in Z$ получим $z = T(T^{-1}(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(T^{-1}z), \psi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b(\psi_n^*(z), \psi_n)$.

Теорема доказана.

Теорема 3.6.2. *Пусть* $\hat{X}^*$ *нормально подчинена к* $\hat{Y}$, $\{\varphi_n^*\}_{n\in N} \subset \sigma(Z, X)$ *и* $\left(\{\varphi_n^*\}_{n\in N}, \{\varphi_n\}_{n\in N}\right)$ *-* $b_{\hat{X}}$ *-атомарное разложение в* Z *с границами* A *и* B, *система* $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$ *-* ω*-*b*-линейно независима относительно* $\hat{X}$ *и такая, что* $\{\varphi_n - \psi_n\}_{n\in N} \in \hat{Y}$. *Тогда существует система* $\{\psi_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z, X)$ *такая, что* $\left(\{\psi_n^*\}_{n\in N}, \{\psi_n\}_{n\in N}\right)$ *является* $b_{\hat{X}}$ *-атомарным разложением в* Z.

Доказательство. Сначала покажем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z), \psi_n)$ при любом $z \in Z$. Рассмотрим оператор $S_m(z) = \sum_{n=m+1}^{m+p} b(\varphi_n^*(z), \varphi_n - \psi_n)$, $\forall m \in N$. По следствию теоремы Хана-Банаха существует $f \in Z^*$ такой, что $\|f\| = 1$ и $f(S_m(z)) = \|S_m(z)\|_Z$. Следовательно,

$$\|S_m(z)\|_Z = f(S_m(z)) = \sum_{n=1}^{m} f(b(\varphi_n^*(z), \varphi_n - \psi_n)) =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} b^*(f, \varphi_n - \psi_n)(\varphi_n^*(z)) \le \left\|\sum_{n=1}^{m} \{\delta_{kn} b^*(f, \varphi_n - \psi_n)\}_{k\in N}\right\|_{\hat{X}^*} \left\|\{\varphi_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} \le$$

$$\le M\|f\| \left\|\sum_{n=1}^{m} \{\delta_{kn}(\varphi_n - \psi_n)\}_{k\in N}\right\|_{\hat{X}^*} \left\|\{\varphi_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} \le MB\left\|\sum_{n=1}^{m} \{\delta_{kn}(\varphi_n - \psi_n)\}_{k\in N}\right\|_{\hat{X}^*} \|z\|_Z.$$

Тогда из $\{\varphi_n - \psi_n\}_{n\in N} \in \hat{Y}$ следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z), \psi_n)$ сходится. Рассмотрим оператор $T: Z \to Z$ по формуле

$$T(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z),\varphi_n-\psi_n)\,,\ z\in Z\,.$$

Ясно, что T является вполне непрерывным оператором. Поэтому, $F=I-T$ есть фредгольмовый оператор и $F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z),\psi_n)$. Найдем $KerF$. Если $z\in KerF$, то $\sum_{n=1}^{\infty} b(\varphi_n^*(z),\psi_n)=0$. Тогда в силу ω-b-линейно независимости $\{\psi_n\}_{n\in N}$ получаем, что $\varphi_n^*(z)=0$ при любом $n\in N$, и значит $z=0$. Таким образом, $KerF=\{0\}$, и следовательно, F ограниченно обратим. Пусть $\psi_n^*:Z\to X$ определен выражением $\psi_n^*(z)=\varphi_n^*(F^{-1}(z))$, $z\in Z$. Из Теоремы 3.6.1 следует, что $(\{\psi_n^*\}_{n\in N},\{\psi_n\}_{n\in N})$ является $b_{\hat{X}}$-атомарным разложением в Z. Теорема доказана.

Теорема 3.6.3. *Пусть $\hat{X}$ - CB-пространство, система $\{g_k\}_{k\in N}\subset L(Z,X)$ является $\hat{X}$-фреймом в Z и имеет сопряженную систему $\{\Lambda_k\}_{k\in N}$ с синтезирующим оператором Λ, система $\{f_k\}_{k\in N}\subset L(Z,X)$ - $\hat{X}$-бесселева в Z, операторы U и V определены по равенствам $U(z)=\{g_k(z)\}_{k\in N}$, $V(z)=\{f_k(z)\}_{k\in N}$, $z\in Z$. Предположим, что существуют числа $\lambda,\beta,\mu\ge 0$ такие, что*

i) $\lambda\|U\|+\beta\|V\|+\mu<\|\Lambda\|^{-1}$;

ii) $\left\|\{g_k(z)\}_{n\in N}-\{f_k(z)\}_{n\in N}\right\|_{\tilde{X}}\le\lambda\left\|\{g_k(z)\}_{n\in N}\right\|_{\tilde{X}}+\beta\left\|\{f_k(z)\}_{n\in N}\right\|_{\tilde{X}}+\mu\|z\|_Z$, $\forall z\in Z$.

Тогда $\{f_k\}_{k\in N}$ образует $\hat{X}$-фрейм в Z и имеет сопряженную систему $\{\Gamma_k\}_{k\in N}$, такую, что $\{\Lambda_k-\Gamma_k\}_{k\in N}$ является $\hat{X}^*$-бесселевой в Z^*.

Доказательство. Сначала покажем, что оператор ΛV ограниченно обратим. Для любого $z\in Z$ имеем

$$\|(I-\Lambda V)(z)\|=\|(\Lambda U-\Lambda V)(z)\|=\|\Lambda(U-V)(z)\|\le$$

$$\le\|\Lambda\|(\lambda\|U(z)\|_{\hat{X}}+\beta\|V(z)\|_{\tilde{X}}+\mu\|z\|_Z)\le\|\Lambda\|(\lambda\|U\|+\beta\|V\|+\mu)\|z\|_Z\,.$$

Тогда из условия i) следует $\|I-\Lambda V\|<1$. Следовательно, оператор ΛU ограниченно обратим. Для любого $z\in Z$ получим

$$\|z\|_Z=\left\|(\Lambda V)^{-1}\Lambda V(z)\right\|_Z\le\left\|(\Lambda V)^{-1}\Lambda\right\|\|V(z)\|_{\hat{X}}\,.$$

С другой стороны, из условия ii) имеем

$$\|V(z)\|_{\hat{X}} \leq \|(U-V)(z)\|_{\hat{X}} + \|U(z)\|_{\hat{X}} \leq$$

$$\leq (1+\lambda)\|U(z)\|_{\hat{X}} + \beta\|V(z)\|_{\hat{X}} + \mu\|z\|_{Z}.$$

Отсюда

$$\|V(z)\|_{\hat{X}} \leq \frac{(1+\lambda)\|U\| + \mu}{1-\beta}\|z\|_{Z},$$

т. е. $\{f_k\}_{k\in N}$ образует $\hat{X}$-фрейм в Z.

Пусть $\Gamma_k = (\Lambda V)^{-1}\Lambda_k$. Ясно, что $\{\Gamma_k\}_{k\in N} \subset L(X,Z)$. Для любого $\{x_k\}_{k\in N} \in \hat{X}$

$$(\Lambda V)^{-1}\Lambda(\{x_k\}_{k\in N}) = (\Lambda V)^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_n(x_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(\Lambda V)^{-1}\Lambda_n(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_n(x_n).$$

По Теореме 3.3.1 следует, что система $\{\Gamma_k\}_{k\in N}$ $\hat{X}^*$-бесселева в Z^*. Также для любого $z \in Z$ имеем

$$z = (\Lambda V)^{-1}\Lambda V(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(\Lambda V)^{-1}\Lambda_n(f_n(z)) = \sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_n(f_n(z)),$$

т. е. $\{\Gamma_k\}_{k\in N}$ является сопряженной системой для $\{f_k\}_{k\in N}$. Наконец, для каждого $\hat{x} = \{x_n\}_{n\in N} \in \hat{X}$ получаем

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}(\Lambda_k - \Gamma_k)(x_k)\right\|_{Z} = \left\|(I-(\Lambda V)^{-1})\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k(x_k)\right\|_{Z} \leq$$

$$\leq \left\|I-(\Lambda V)^{-1}\right\|\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k(x_k)\right\|_{Z} \leq \left\|I-(\Lambda V)^{-1}\right\|\|\Lambda\|\|\hat{x}\|_{\hat{X}}.$$

Остается применить Теорему 3.3.1. Теорема доказана.

3.7. Устойчивость банахового $\hat{X}$-фрейма и $\hat{X}$-Рисс g-базиса в банаховых пространствах

Пусть X и Z - банаховые пространства, $\hat{X}$ - некоторое CB-пространство над X. Пусть $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ и $\{\varphi_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z,X)$ - некоторые системы.

Справедливы следующие результаты относительно устойчивости банахового $\hat{X}$-фрейма.

Теорема 3.7.1. *Пусть* $\left(\{\varphi_n^*\}_{n\in N}, S\right)$ *банаховый* $\hat{X}$ *-фрейм в* Z *с границами* A *и* B, *оператор* $U\in L(Z,\hat{X})$ *определен по формуле* $U(z)=\{\varphi_n^*(z)\}_{n\in N}$, $z\in Z$, $\{\psi_n^*\}_{n\in N}\subset L(Z,X)$ - $\hat{X}$ *-бесселева система в* Z *и оператор* $V: Z\to\hat{X}$ *задан по формуле* $V(z)=\{\psi_n^*(z)\}_{n\in N}$, $z\in Z$. *Предположим, что существуют числа* $\lambda,\mu\ge 0$ *и* $\beta\in[0,1)$*:*

i) $\lambda\|US\|+\beta\|I-US\|+\mu\|S\|<1$;

ii) $\left\|\{\varphi_n^*(z)\}_{n\in N}-\{\psi_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\tilde{X}}\le\lambda\left\|\{\varphi_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\tilde{X}}+\beta\left\|\{\psi_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\tilde{X}}+\mu\|z\|_Z$ *для* $z\in Z$.

Тогда существует $T\in L(\hat{X},Z)$ *такой, что* $\left(\{\psi_n^*\}_{n\in N}, T\right)$ *является банаховым* $\hat{X}$ *-фреймом в* Z, *с границами*

$$\frac{(1-(\lambda\|US\|+\beta\|I-US\|+\mu\|S\|))\|S\|^{-1}}{1+\beta},\ \frac{(1+\lambda)\|U\|+\mu}{1-\beta}. \tag{3.7.1}$$

Доказательство. Ввиду условия ii) теоремы имеем

$$\|V(z)\|_{\hat{X}}\le\|(U-V)(z)\|_{\hat{X}}+\|U(z)\|_{\hat{X}}\le$$
$$\le(1+\lambda)\|U(z)\|_{\hat{X}}+\beta\|V(z)\|_{\hat{X}}+\mu\|z\|_Z,\ z\in Z.$$

Отсюда получаем $\|V(z)\|_{\hat{X}}\le\dfrac{(1+\lambda)\|U\|+\mu}{1-\beta}\|z\|_Z$, $z\in Z$. Покажем ограниченную обратимость оператора $I+(V-U)S$. Для произвольного $\hat{x}\in\hat{X}$ оценим $\|(V-U)S(\hat{x})\|_{\hat{X}}$. Применяя условие ii), получим

$$\|(V-U)S(\hat{x})\|_{\hat{X}}\le\lambda\|US(\hat{x})\|_{\hat{X}}+\beta\|VS(\hat{x})\|_{\hat{X}}+\mu\|S(\hat{x})\|_Z\le$$
$$\le\lambda\|US(\hat{x})\|_{\hat{X}}+\beta\|(I-US)(\hat{x})\|_{\hat{X}}+\mu\|S(\hat{x})\|_Z+\beta\|(I+(V-U))S(\hat{x})\|_{\hat{X}}\le$$
$$\le(\lambda\|US\|+\beta\|I-US\|+\mu\|S\|)\|\hat{x}\|_{\hat{X}}+\beta\|(I+(V-U))S(\hat{x})\|_{\hat{X}}.$$

Из последнего соотношения заключаем, что оператор $I+(V-U)S$ ограниченно обратим, и имеет место соотношение:

$$\left\|(I+(V-U)S)^{-1}\right\|\le\frac{1+\beta}{1-(\lambda\|US\|+\beta\|I-US\|+\mu\|S\|)}.$$

Обозначим через $T=S(I+(V-U)S)^{-1}$. Тогда ясно, что $T\in L(\hat{X},Z)$. Имеем

$$TV=S(I+(V-U)S)^{-1}V=S(I+(V-U)S)^{-1}(I+(V-U)S)U=SU=I.$$

Следовательно, для любого $z \in Z$ имеем

$$\|z\|_Z = \|TV(z)\|_Z \le \|T\| \|V(z)\|_{\hat{X}} = \left\|S(I+(V-U)S)^{-1}\right\| \|V(z)\|_{\hat{X}} \le$$

$$\le \|S\| \left\|(I+(V-U)S)^{-1}\right\| \|V(z)\|_{\hat{X}} \le \frac{(1+\beta)\|S\|}{1-(\lambda\|US\|+\beta\|I-US\|+\mu\|S\|)} \|V(z)\|_{\hat{X}} .$$

Таким образом, $\left(\{\psi_n^*\}_{n\in N}, T\right)$ является банаховым $\hat{X}$-фреймом в Z с границами (3.7.1). Теорема доказана.

Следствие 3.7.1. *Пусть Z - рефлексивно, система $\{\varphi_k^*\}_{k\in N}$ образует $\hat{X}^*$-Рисс g-базис в Z^* с границами A и B. Пусть существуют $\lambda, \mu \ge 0$ и $\beta \ge 0$:*

i) $\max\{\beta, \lambda + \mu/A\} < 1$;

ii) $\left\|\{\varphi_n^*(z)\}_{n\in N} - \{\psi_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\tilde{X}} \le \lambda \left\|\{\varphi_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\tilde{X}} + \beta \left\|\{\psi_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\tilde{X}} + \mu\|z\|_Z$ *для* $z \in Z$.

Тогда $\{\psi_k^*\}_{k\in N}$ образует $\hat{X}^*$-Рисс g-базис в Z^* с границами (3.7.1).

Также имеет место следующая

Теорема 3.7.2. *Пусть $\hat{X} \subset \hat{X}_p$, $(1 \le p \le \infty)$ и существуют $L \in L(\hat{X})$ и $F_n, G_n \in L(X)$ такие, что $L(V(z)) = U(z)$, $z \in Z$,*

$$a_1\|x\|_X \le \|F_n(x)\|_X \le a_2\|x\|_X ,\ a_1, a_2 > 0 ,\ x \in X ,\ n \in N ;$$

$$b_1\|x\|_X \le \|G_n(x)\|_X \le b_2\|x\|_X ,\ b_1, b_2 > 0 ,\ x \in X ,\ n \in N .$$

Предположим, что существуют числа $\lambda, \mu \ge 0$ и $\beta \in [0,1)$:

i) $\mu < a_1(1-\lambda)\|S\|^{-1}$;

ii) $\left\|\{(F_n\varphi_n^* - G_n\psi_n^*)(z)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} \le \lambda \left\|\{F_n\varphi_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} + \beta \left\|\{G_n\psi_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} + \mu\|z\|_Z$ *для* $z \in Z$.

Тогда существует $T \in L(\hat{X}, Z)$ такой, что $\left(\{\psi_n^*\}_{n\in N}, T\right)$ является банаховым $\hat{X}$-фреймом в Z с границами

$$\frac{a_1(1-\lambda)\|S\|^{-1} - \mu}{(1+\beta)b_2} \ \text{и}\ \frac{a_2(1+\lambda)\|U\| + \mu}{(1-\beta)b_1} .$$

Доказательство. Для любого $z \in Z$, с учетом условия ii), получаем

$$\left\|\{G_n\psi_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} \le \left\|\{(F_n\varphi_n^* - G_n\psi_n^*)(z)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} + \left\|\{F_n\varphi_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} \le$$

$$\le (1+\lambda)\left\|\{F_n\varphi_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} + \beta \left\|\{G_n\psi_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} + \mu\|z\|_Z .$$

Последнее неравенство можно записать в виде

$$\left\|\left\{G_n\psi_n^*(z)\right\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} \le \frac{1+\lambda}{1-\beta}\left\|\left\{F_n\varphi_n^*(z)\right\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} + \frac{\mu}{1-\beta}\|z\|_Z .$$

Тогда,

$$\|V(z)\|_{\hat{X}} \le \frac{1}{b_1}\left\|\left\{G_n\psi_n^*(z)\right\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} \le \frac{1+\lambda}{(1-\beta)b_1}\left\|\left\{F_n\varphi_n^*(z)\right\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} + \frac{\mu}{(1-\beta)b_1}\|z\|_Z \le$$

$$\le \frac{(1+\lambda)a_2}{(1-\beta)b_1}\|U(z)\|_{\hat{X}} + \frac{\mu}{(1-\beta)b_1}\|z\|_Z \le \frac{a_2(1+\lambda)\|U\|+\mu}{(1-\beta)b_1}\|z\|_Z .$$

Затем, из последовательности неравенств

$$\left\|\left\{G_n\psi_n^*(z)\right\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} \ge \left\|\left\{F_n\varphi_n^*(z)\right\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} - \left\|\left\{\left(F_n\varphi_n^* - G_n\psi_n^*\right)(z)\right\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} \ge$$

$$\ge (1-\lambda)\left\|\left\{F_n\varphi_n^*(z)\right\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} - \beta\left\|\left\{G_n\psi_n^*(z)\right\}_{n\in N}\right\|_{\tilde{X}} - \mu\|z\|_Z$$

получаем, что

$$\left\|\left\{G_n\psi_n^*(z)\right\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} \ge \frac{1-\lambda}{1+\beta}\left\|\left\{F_n\varphi_n^*(z)\right\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} - \frac{\mu}{1+\beta}\|z\|_Z .$$

Таким образом,

$$\|V(z)\|_{\hat{X}} \ge \frac{1}{b_2}\left\|\left\{G_n\psi_n^*(z)\right\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} \ge \frac{1-\lambda}{(1+\beta)b_2}\left\|\left\{F_n\varphi_n^*(z)\right\}_{n\in N}\right\|_{\hat{X}} - \frac{\mu}{(1+\beta)b_2}\|z\|_Z \ge$$

$$\ge \frac{(1-\lambda)a_1}{(1+\beta)b_2}\|U(z)\|_{\hat{X}} - \frac{\mu}{(1+\beta)b_2}\|z\|_Z \ge \frac{a_1(1-\lambda)\|S\|^{-1}-\mu}{(1+\beta)b_2}\|z\|_Z .$$

Положим $T = SL$. Тогда $SLV = SU = I$. Теорема доказана.

Теорема 3.7.3. *Пусть Z - рефлексивно, $\left(\left\{\varphi_n^*\right\}_{n\in N}, S\right)$ - банаховый $\hat{X}$-фрейм в Z с границами A и B, оператор $U \in L(Z,\hat{X})$ определен по формуле $U(z) = \left\{\varphi_n^*(z)\right\}_{n\in N}$, $z \in Z$, $\left\{\psi_n^*\right\}_{n\in N} \subset L(Z,X)$ - $\hat{X}$-бесселева система в Z и существуют $\lambda,\mu \ge 0$ и $\beta \in [0,1)$:*

i) $\max\left\{\beta, \lambda + \mu\|S\|\right\} < 1$;

ii) $\left\|\sum_k x_k^*\varphi_k^* - \sum_k x_k^*\psi_k^*\right\| \le \lambda\left\|\sum_k x_k^*\varphi_k^*\right\| + \beta\left\|\sum_k x_k^*\psi_k^*\right\| + \mu\left\|\left\{x_k^*\right\}\right\|_{\hat{X}^*}$, $\forall\left\{x_k^*\right\} \in \hat{X}^*$.

Тогда существует $T \in L(\hat{X}, Z)$ такой, что $\left(\left\{\psi_n^*\right\}_{n\in N}, T\right)$ является банаховым $\hat{X}$-фреймом в Z с границами

$$\frac{(1-\lambda)A-\mu}{1+\beta},\ \frac{(1+\lambda)B+\mu}{1-\beta}. \tag{3.7.2}$$

Доказательство. Из условия ii) имеем

$$\left\|\sum_k x_k^*\psi_k^*\right\| \le \left\|\sum_k x_k^*\varphi_k^* - \sum_k x_k^*\psi_k^*\right\| + \left\|\sum_k x_k^*\varphi_k^*\right\| \le$$

$$\le (1+\lambda)\left\|\sum_k x_k^*\varphi_k^*\right\| + \beta\left\|\sum_k x_k^*\psi_k^*\right\| + \mu\left\|\{x_k^*\}\right\|_{\hat{X}^*}.$$

Отсюда, получим

$$\left\|\sum_k x_k^*\psi_k^*\right\| \le \frac{1+\lambda}{1-\beta}\left\|\sum_k x_k^*\varphi_k^*\right\| + \frac{\mu}{1-\beta}\left\|\{x_k^*\}\right\|_{\hat{X}^*} \le \frac{(1+\lambda)B+\mu}{1-\beta}\left\|\{x_k^*\}\right\|_{\hat{X}^*}. \tag{3.7.3}$$

Следовательно, оператор $F(\hat{x}^*) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^*\psi_k^*$ ограничен. В силу Теоремы 3.3.4 система $\{\Lambda_k\}_{k\in N} \subset L(X,Z)$, $\Lambda_k(x) = S(\{\delta_{nk}x\}_{n\in N})$ образует $\hat{X}^*$-фрейм в Z^* с границами $\frac{1}{B}$ и $\frac{1}{A}$, удовлетворяющее равенству (3.4.4). Ясно, что $S^*(f) = \{\Lambda_k^*(f)\}_{k\in N}$, $f \in Z^*$. Используя (3.4.4) и условие ii) получим

$$\left\|f - FS^*(f)\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k^*(f)(\varphi_k^* - \psi_k^*)\right\| \le$$

$$\le \lambda\left\|\sum_k \Lambda_k^*(f)\varphi_k^*\right\| + \beta\left\|\sum_k \Lambda_k^*(f)\psi_k^*\right\| + \mu\left\|S^*(f)\right\|_{\hat{X}^*} \le$$

$$\le (\lambda + \mu\|S\|)\|f\| + \beta\left\|FS^*(f)\right\|.$$

Из условия i) следует, что оператор FS^* ограниченно обратим и $\left\|(FS^*)^{-1}\right\| \le \frac{1+\beta}{(1-\lambda)-\mu\|S\|}$. Следовательно, $\operatorname{Im} F = Z^*$ и по Теореме 3.3.3 система $\{\psi_k^*\}_{k\in N}$ образует $\hat{X}$-фрейм в Z. Определим оператор $T = (SF^*)^{-1}S$. Так как $F^*(z) = \{\psi_k^*(z)\}_{k\in N}$, $z \in Z$, имеем $T(\{\psi_k^*(z)\}_{k\in N}) = TF^*(z) = z$. Тогда

$$\|z\|_Z = \left\|T(\{\psi_k^*(z)\}_{k\in N})\right\|_Z \le \left\|(FS^*)^{-1}\right\|\left\|S(\{\psi_k^*(z)\}_{k\in N})\right\|_Z \le \frac{(1+\beta)\|S\|}{1-\lambda-\mu\|S\|}\left\|\{\psi_k^*(z)\}_{k\in N}\right\|_{\hat{X}}.$$

Учитывая $\|S\| = \frac{1}{A}$, из последнего соотношения и (3.7.3) получим

$$\frac{(1-\lambda)A-\mu}{1+\beta}\|z\|_Z \le \left\|\{\psi_k^*(z)\}_{k\in N}\right\|_{\hat{X}} \le \frac{(1+\lambda)B+\mu}{1-\beta}\|z\|_Z .$$

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы, в частности, для устойчивости $\hat{X}$-Рисс базиса получаем

Следствие 3.7.2. *Пусть* Z *- рефлексивно и система* $\{\varphi_k^*\}_{k\in N} \subset L(Z,X)$ *образует* $\hat{X}^*$*-Рисс* g*-базис в* Z^* *с границами* A *и* B*. Предположим, что существуют числа* $\lambda,\mu \ge 0$ *и* $\beta \in [0,1)$*:*

i) $\max\{\beta, \lambda + \mu/A\} < 1$*;*

ii) $\left\|\sum_k x_k^*\varphi_k^* - \sum_k x_k^*\psi_k^*\right\| \le \lambda\left\|\sum_k x_k^*\varphi_k^*\right\| + \beta\left\|\sum_k x_k^*\psi_k^*\right\| + \mu\left\|\{x_k^*\}\right\|_{\hat{X}^*}, \quad \forall\{x_k^*\} \in \hat{X}^*.$

Тогда $\{\psi_k^*\}_{k\in N}$ *образует* $\hat{X}^*$*-Рисс* g*-базис в* Z^* *с границами (3.7.2).*

ГЛАВА IV.
НЕКОТОРЫЕ АНАЛОГИ КЛАССИЧЕСКИХ ТЕОРЕМ ТИПА РИССА-ФИШЕРА И ПЭЛИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Теория рядов Фурье служит основой гармонического анализа. Многие задачи теории уравнений в частных производных, механики, математической физики, и других областей математики решаются методом Фурье. Этому направлению посвящены работы авторов A.Ashyralyev, D.Arjmand [84], A.Ashyralyev, Kh.Belakroum, A.Guezane-Lakoud [85], M.Kudu, I.Amirali [188], J.Nagumo, S.Arimoto, S.Yoshizawa [196], M.Jamaguti [178], J.M.Greenberg [143], P.L.Davis [119], А.И.Кожанов [48], О.А.Ладыженская [51], Р.С.Жамалов [25], К.И.Худавердиев [74], К.И.Худавердиев, А.А.Велиев [75] и др..

Одним из важных направлений теории рядов Фурье является изучение свойства коэффициентов ряда Фурье. В пространстве L_2 квадратично суммируемых функций хорошо известны равенство Парсеваля и теорема Рисса-Фишера. Обобщением теоремы Рисса-Фишера в пространствах L_p, $p \neq 2$, является теорема Хаусдорфа-Юнга, доказанная В.Г.Юнгом и Ф.Хаусдорфом для классической системы экспонент. Этот факт для общих ортогональных и равномерно ограниченных систем в пространствах L_p, $p \neq 2$, было изучено Риссом Ф. Аналог теоремы Хаусдорфа-Юнга для преобразования Фурье изучалась в работах Е.Титчмарша [216], К.И.Бабенко [4], У.Бекнер [88]. По поводу соотношения между функцией и ее коэффициентов ряда Фурье также известна теорема Харди-Литтлвуда для тригонометрических систем. Этот результат для ортогональных и равномерно ограниченных систем изучался в работе Пэли [200]. Более подробно об этих сведениях можно познакомиться из монографий S.Kaczmarz, H.Steinhaus [41], А.Зигмунд [26], Г.Г.Харди, Дж.И.Литтлвуд, Г.Полиа [73], R.Young [220] и др. В данной главе изучаются аналоги теорем Рисса и Пэли о свойствах коэффициентов ряда Фурье относительно ортогональной и равномерно ограниченной системы в пространствах Лебега и в обобщенных пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости со смешанной нормой. Полученные результаты применяются для классической системы экспонент, а также для установления существования и единственности обобщенного решения в $B_{p,p,T}^{1+\frac{p}{q},\frac{p}{q}}$, $p>2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, смешанной задачи для одного класса уравнений третьего порядка, рассмотренной в [75] при $p=2$.

4.1. $l_p(a,b)$ варианты теоремы Рисса-Фишера

Пусть $L_{(p,,q)}((a,b)\times(c,d))$, $1<p<+\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, - банахово пространство измеримых на $(a,b)\times(c,d)$ функций $f(x,y)$, для которых конечна смешанная норма

$$\|f\|_{L_{(p,q)}}=\left(\int_a^b\left(\int_c^d|f(x,y)|^q dy\right)^{\frac{p}{q}}dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

и $W_{(p,q)}^{m,n}((a,b)\times(c,d))$, $1<p<+\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, - банахово пространство функций $u(x,y)$, имеющих на (a,b) обобщенные производные $\frac{\partial^m u}{\partial x^m}$, $\frac{\partial^n u}{\partial y^n}$ и конечную смешанную норму

$$\|u\|_{W_{(p,q)}^{m,n}}=\|u\|_{L_{(p,q)}}+\left\|\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right\|_{L_{(p,q)}}+\left\|\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right\|_{L_{(p,q)}}.$$

Обозначим через $l_p(a,b)$, $1<p<+\infty$, - банахово пространство последовательностей $a(t)=\{a_i(t)\}_{i\in N}$ измеримых на (a,b) функций, для которых конечна норма

$$\|a\|_{l_p(a,b)}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\int_a^b|a_i(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $\{\varphi_n(t)\}_{n\in N}$, $t\in[a,b]$, - ортогональнная система: $|\varphi_n(t)|\le M$ почти всюду на $[a,b]$ $(n\in N)$, где M не зависит от n.

Следующая теорема является аналогом Теоремы Рисса ([26], стр.154).

Теорема 4.1.1. *Верны следующие утверждения:*

1) если $f \in L_{(q,p)}((a,b)\times(c,d))$, $1 < p \le 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $a_i(t)=\int_c^d f(t,s)\varphi_i(s)ds$, *то* $a(t)=\{a_i(t)\}_{i\in N} \in l_q(a,b)$, *причем*

$$\|a\|_{l_q(a,b)} \le M^{\frac{2-p}{p}} \|f\|_{L_{(q,p)}}. \tag{4.1.1}$$

2) если $a(t)=\{a_i(t)\}_{i\in N} \in l_p(a,b)$, $1 < p \le 2$, *то существует* $f \in L_{(p,q)}((a,b)\times(c,d))$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *такая, что* $a_i(t)=\int_c^d f(t,s)\varphi_i(s)ds$, *причем*

$$\|f\|_{L_{(p,q)}} \le M^{\frac{2-p}{p}} \|a\|_{l_p(a,b)}. \tag{4.1.2}$$

Доказательство. Сначала докажем утверждение 1). Возьмем произвольную функцию $f \in L_{(q,p)}((a,b)\times(c,d))$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. В силу Теоремы Фубини, для почти всех $t\in[a,b]$ имеет место включение $f(t,\cdot)\in L_p(c,d)$. Пусть $a(t)=\{a_i(t)\}_{i\in N}$: $a_i(t)=\int_c^d f(t,s)\varphi_i(s)ds$. По Теореме Рисса для почти всех $t\in[a,b]$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i(t)|^q$ сходится и

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i(t)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le M^{\frac{2-p}{p}}\left(\int_c^d |f(t,s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.1.3}$$

Возводя обе части (4.1.3) в q-ую степень и интегрируя по $t\in[a,b]$ получим $\sum_{i=1}^{\infty}\int_a^b |a_i(t)|^q dt < +\infty$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_a^b |a_i(t)|^q dt \le M^{\frac{(2-p)q}{p}}\int_a^b\left(\int_c^d |f(t,s)|^p ds\right)^{\frac{q}{p}} dt. \tag{4.1.4}$$

Очевидно, что из (4.1.4) следует (4.1.1).

Теперь докажем справедливость утверждения 2). Пусть последовательность $a(t)=\{a_i(t)\}_{i\in N}$ такая, что $\sum_{i=1}^{\infty}\int_a^b |a_i(t)|^p dt<+\infty, 1<p\le 2$. Тогда согласно следствию Теоремы Б.Леви для почти всех $t\in[a,b]$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i(t)|^p$ сходится. Применяя Теорему Рисса, получаем, что существует $f(t,\cdot)\in L_q(c,d)$, для которой $a_i(t)=\int_c^d f(t,s)\varphi_i(s)ds$ и

$$\left(\int_c^d |f(t,s)|^q ds\right)^{\frac{1}{q}} \le M^{\frac{2-p}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.1.5}$$

Далее, возведем обе части (4.1.5) в p-ую степень и проинтегрируем по t на отрезке $[a,b]$. Имеем

$$\int_a^b\left(\int_c^d |f(t,s)|^q ds\right)^{\frac{p}{q}} dt \le M^{p-2}\sum_{i=1}^{\infty}\int_a^b |a_i(t)|^p dt. \tag{4.1.6}$$

Из (4.1.6) следует (4.1.2). Теорема доказана.

Также имеет место аналог Теоремы Пэли ([26], стр.182) в $l_p(a,b)$.

Теорема 4.1.2. *Верны следующие утверждения:*

1) если $f\in L_p((a,b)\times(c,d))$, $1<p\le 2$, *и* $a_i(t)=\int_c^d f(t,s)\varphi_i(s)ds$, *то сходится ряд* $\sum_{i=1}^{\infty} i^{p-2}\int_a^b |a_i(t)|^p dt$ *и*

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^{p-2}\int_a^b |a_i(t)|^p dt \le M_p \int_a^b\int_c^d |f(t,s)|^p dsdt; \tag{4.1.7}$$

2) если последовательность $a(t)=\{a_i(t)\}_{i\in N}$ *такая, что* $\sum_{i=1}^{\infty} i^{p-2}\int_a^b |a_i(t)|^p dt<+\infty$, $p\ge 2$, *то существует* $f\in L_p((a,b)\times(c,d))$, $a_i(t)=\int_c^d f(t,s)\varphi_i(s)ds$, *и*

$$\int_a^b\int_c^d |f(t,s)|^p dsdt \le M_p \sum_{i=1}^{\infty} i^{p-2} \int_a^b |a_i(t)|^p dt. \qquad (4.1.8)$$

Доказательство. Пусть $f \in L_p((a,b)\times(c,d))$, $1 < p \le 2$. Тогда по Теореме Фубини для почти всех $t \in [a,b]$ функция $f(t,\cdot) \in L_p(c,d)$. Применяя Теорему Пэли получаем, что для почти всех $t \in [a,b]$ сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} i^{p-2}|a_i(t)|^p$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i(t)|^p i^{p-2} \le M_p \int_c^d |f(t,s)|^p ds. \qquad (4.1.9)$$

Проинтегрировав обе части (4.1.9) по отрезку $[a,b]$ получим (4.1.7).

Покажем справедливость 2). Пусть последовательность $a(t) = \{a_i(t)\}_{i\in N}$ такая, что сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} i^{p-2}\int_a^b |a_i(t)|^p dt < +\infty$, $p \ge 2$. Тогда почти всюду на $[a,b]$ сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} i^{p-2}|a_i(t)|^p$. Поэтому, в силу Теоремы Пэли $\exists f(t,\cdot) \in L_p(c,d)$ такая, что

$$\int_a^b |f(t,s)|^p ds \le M_p \sum_{i=1}^{\infty} i^{p-2} |a_i(t)|^p. \qquad (4.1.10)$$

Интегрируя обе части (4.1.10) по отрезку $[a,b]$ получим справедливость (4.1.8). Теорема доказана.

Приведем аналог известного результата о связи между степенью гладкости функции и скоростью сходимости ее ряда Фурье по системе $\{e^{\mathrm{int}}\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}$.

Теорема 4.1.3. Пусть $f \in W_{(p,q)}^{0,m+1}((-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi))$, $1 < p \le 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ такая, что $\frac{\partial^k f(t,-\pi)}{\partial s^k} = \frac{\partial^k f(t,\pi)}{\partial s^k}$, $k = \overline{0,m}$, п. в. на $(-\pi,\pi)$ и $c_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t,s)e^{-ins}ds$, $n \in Z$. Тогда ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^m \int_{-\pi}^{\pi} |c_n(t)| dt$ сходится и

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^m \int_{-\pi}^{\pi} |c_n(t)| dt \le (2\pi)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\ne 0}}^{+\infty} \frac{1}{|n|^p} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \frac{\partial^{m+1} f}{\partial s^{m+1}} \right\|_{L_{(q,p)}}. \qquad (4.1.11)$$

Доказательство. Используя интегрирование по частям для $c_n(t)$ по частям получим

$$c_n(t)=\frac{c_n^{m+1}(t)}{(in)^{m+1}},$$

где $c_n^{m+1}(t)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^{m+1}f(t,s)}{\partial s^{m+1}}e^{-ins}ds$, $n\in Z$. По Теореме 4.1.2 согласно $\frac{\partial f^{m+1}(t,s)}{\partial s^{m+1}}\in L_{(q,p)}((-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi))$ имеем $\left\{c_n^{m+1}(t)\right\}_{n\in Z}\in l_q(-\pi,\pi)$ и

$$\left\|\left\{c_n^{m+1}(t)\right\}_{n\in Z}\right\|_{l_q(-\pi,\pi)}\le\left\|\frac{\partial^{m+1}f}{\partial s^{m+1}}\right\|_{L_{(q,p)}}. \tag{4.1.12}$$

Далее, используя неравенство Гельдера получим

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|n|^m|c_n(t)|=\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{+\infty}\frac{\left|c_n^{m+1}(t)\right|}{|n|}\le\left(\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{+\infty}\frac{1}{|n|^p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|c_n^{m+1}(t)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.1.13}$$

Отсюда, интегрируя обе части (4.1.13) по t от $-\pi$ до π получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|n|^m\int_{-\pi}^{\pi}|c_n(t)|dt\le\left(\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{+\infty}\frac{1}{|n|^p}\right)^{\frac{1}{p}}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|c_n^{m+1}(t)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}dt. \tag{4.1.14}$$

Применяя неравенство Гельдера, будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|c_n^{m+1}(t)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}dt\le(2\pi)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|c_n^{m+1}(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.1.15}$$

Таким образом, из (4.1.13), (4.1.14) и (4.1.15) следует, что

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|n|^m\int_{-\pi}^{\pi}|c_n(t)|dt\le$$

$$\le(2\pi)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{+\infty}\frac{1}{|n|^p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|c_n^{m+1}(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\le(2\pi)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{+\infty}\frac{1}{|n|^p}\right)^{\frac{1}{p}}\left\|\frac{\partial^{m+1}f}{\partial s^{m+1}}\right\|_{L_{(q,p)}}.$$

Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая

Теорема 4.1.4. *Пусть* $f \in W^{0,m}_{(p,q)}((-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi))$, $1 < p \le 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *такая, что* $\frac{\partial^k f(t,-\pi)}{\partial s^k} = \frac{\partial^k f(t,\pi)}{\partial s^k}$, $k=\overline{0,m-1}$, *п. в. на* $(-\pi,\pi)$ *и* $c_n(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t,s)e^{-ins}ds$, $n \in Z$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^{mq} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |c_n(t)|^q dt$, *сходится и*

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{mq} \int_{-\pi}^{\pi} |c_n(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \le \left\| \frac{\partial^m f}{\partial s^m} \right\|_{L_{(q,p)}}.$$

4.2. Аналоги теорем Рисса и Пэли в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости

Пусть Ω - измеримое множество из R^n и $p(x)$ - измеримая на Ω функция такая, что $p(x) \ge 1$. Для множества $E \subset \Omega$ обозначим

$$p_+(E) = ess\sup_{x\in E} p(x) \text{ и } p_-(E) = ess\inf_{x\in E} p(x),$$

в частности, положим $p_+ = p_+(\Omega)$, $p_- = p_-(\Omega)$. Пусть $\Omega_\infty = \{x \in \Omega : p(x) = \infty\}$.

Определение 4.2.1. *Модуляром измеримой функции* $f : \Omega \to R$ *относительно* $p(\cdot)$ *называется число*

$$\rho_{p(\cdot),\Omega}(f) = \int_{\Omega\backslash\Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx + \|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)},$$

где $\|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)} = ess\sup_{x\in\Omega} |f(x)|$.

Через $L_{p(x)}(\Omega)$ обозначается множество измеримых функций $f : \Omega \to R$ таких, что $\rho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda) < +\infty$ для некоторого $\lambda > 0$. $L_{p(x)}(\Omega)$ становится банаховым пространством по норме

$$\|f\|_{L_{p(x)}(\Omega)} = \inf\{\lambda > 0 : \rho_{p(\cdot),\Omega}(f/\lambda) \le 1\}.$$

В случае, когда $p(x) = p$, банахово пространство $L_{p(x)}(\Omega)$ совпадает с обычным лебеговым пространством $L_p(\Omega)$.

Пусть $q(x)$, $q(x)\ge 1$, - измеримая на Ω функция и T - измеримое множество из R^n. Через $L_{q(\cdot)}(\Omega, L_{p(\cdot)}(T))$ обозначается пространство измеримых на $\Omega\times T$ функций $f(x,t):\Omega\times T\to R$ таких, что для почти всех $x\in\Omega$ $f(x,\cdot)\in L_{p(x)}(T)$ и $\|f(x,\cdot)\|_{L_{p(x)}(T)}\in L_{q(x)}(\Omega)$, а через $l_{p(x)}(\Omega)$ множество последовательностей $\{c_k(x)\}_{k\in N}$ измеримых на Ω функций, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Omega}|c_k(x)|^{p(x)}dx<+\infty .$$

Пусть $l_{p(x),p(x)-2}(\Omega)$ - множество последовательностей $\{c_k(x)\}_{k\in N}$ измеримых на Ω функций таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Omega}k^{p(x)-2}|c_k(x)|^{p(x)}dx<+\infty .$$

Для последовательности $\{c_k(x)\}_{k\in N}$ положим

$$\|\{c_k\}\|_{l_{p(x)}(\Omega)}=\inf\left\{\lambda>0:\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Omega}\left(\frac{|c_k(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}\le 1\right\}$$

и

$$\|\{c_k\}\|_{l_{p(x),p(x)-2}(\Omega)}=\inf\left\{\lambda>0:\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Omega}k^{p(x)-2}\left(\frac{|c_k(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}\le 1\right\}.$$

Пространства $l_{p(x)}(\Omega)$ и $l_{p(x),p(x)-2}(\Omega)$ являются линейными нормированными пространствами с нормой $\|\{c_k\}\|_{l_{p(x)}(\Omega)}$ и $\|\{c_k\}\|_{l_{p(x),p(x)-2}(\Omega)}$ соответственно.

Справедлив аналог Теоремы Рисса ([26], стр.154) в $L_{q(x)}(\Omega, L_{p(x)}(T))$.

Теорема 4.2.1. *Верны следующие утверждения:*

1) Если $f\in L_{q(x)}((a,b),L_{p(x)}(c,d))$, $1<p_-\le p(x)\le 2$, *и* $c_k(x)=\int_c^d f(x,t)\varphi_k(t)dt$, $k\in N$, *то* $\{c_k\}_{k\in N}\in l_{q(x)}(a,b)$, $q(x)=\dfrac{p(x)}{p(x)-1}$, *и*

$$\|\{c_k\}_{k\in N}\|_{l_{q(x)}(a;b)}\le M_1(p)\|f\|_{L_{q(x)}((a,b),L_{p(x)}(c,d))}. \tag{4.2.1}$$

2) Для любой последовательности $\{c_k\}_{k\in N} \in l_{p(x)}(a,b)$, $1 < p(x) \le 2$, *существует функция* $f \in L_{p(x)}((a,b), L_{q(x)}(c,d))$, $q(x) = \dfrac{p(x)}{p(x)-1}$, *для которой* $c_k(x) = \int\limits_c^d f(x,t)\varphi_k(t)dt$, $k \in N$, *и такая, что*

$$\|f\|_{L_{p(x)}((a,b),L_{q(x)}(c,d))} \le M_1(p)\left\|\{c_k\}_{k\in N}\right\|_{l_{p(x)}(a,b)}, \tag{4.2.2}$$

где $M_1(p) = \max\left\{M^{\frac{2}{p_-}-1}, M^{\frac{2}{p_+}-1}\right\}$.

Доказательство. Сначала докажем 1). Пусть $f \in L_{q(x)}((a,b), L_{p(x)}(c,d))$. Тогда для почти всех $x \in [a,b]$ $f(x,\cdot) \in L_{p(x)}(c,d)$. Согласно Теореме Рисса для почти всех $x \in [a,b]$ последовательность $\{c_k(x)\}_{k\in N}$ удовлетворяет условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^{q(x)} < +\infty$ и имеет место

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|c_k(x)|^{q(x)}\right)^{\frac{1}{q(x)}} \le M^{\frac{2}{p(x)}-1}\left(\int_c^d |f(x,t)|^{p(x)}dt\right)^{\frac{1}{p(x)}} . \tag{4.2.3}$$

Для $\forall\lambda > 0$ из (4.2.3) получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|c_k(x)|}{\lambda}\right)^{q(x)} \le \left(\frac{M_1(p)\|f(x,\cdot)\|_{L_{p(x)}(c,d)}}{\lambda}\right)^{q(x)} . \tag{4.2.4}$$

Интегрируя обе части (4.2.4) по отрезку $[a,b]$, в результате получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b\left(\frac{|c_k(x)|}{\lambda}\right)^{q(x)}dx \le \int_a^b\left(\frac{M_1(p)\|f(x,\cdot)\|_{L_{p(x)}(c,d)}}{\lambda}\right)^{q(x)}dx .$$

Отсюда имеем

$$\inf\left\{\lambda > 0 : \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b\left(\frac{|c_k(x)|}{\lambda}\right)^{q(x)}dx \le 1\right\} \le \inf\left\{\lambda > 0 : \int_a^b\left(\frac{M_1(p)\|f(x,\cdot)\|_{L_{p(x)}(c,d)}}{\lambda}\right)^{q(x)}dx \le 1\right\}.$$

Таким образом

$$\left\|\{c_k\}_{k\in N}\right\|_{l_{q(x)}(a,b)} \le \|M_1(p)f\|_{L_{q(x)}((a,b),L_{p(x)}(c,d))} = M_1(p)\|f\|_{L_{q(x)}((a,b),L_{p(x)}(c,d))} .$$

Покажем справедливость 2). Пусть последовательность $\{c_k(x)\}_{k\in N}$ такая, что $\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b |c_k(x)|^{p(x)}dx < +\infty$. Используя следствие Теоремы Б.Леви, получаем $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k(x)|^{p(x)} < +\infty$, для почти всех $x\in[a,b]$. Тогда согласно Теореме Рисса для почти всех $x\in[a,b]$ существует функция $f(x,\cdot)\in L_{q(x)}(c,d)$, для которой $c_k(x)=\int_c^d f(x,t)\varphi_k(t)dt$, $k\in N$, и

$$\|f(x,\cdot)\|_{L_{q(x)}(c,d)} \le M^{\frac{2}{p(x)}-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|c_k(x)|^{p(x)}\right)^{\frac{1}{p(x)}} \le M_1(p)\left(\sum_{k=1}^{\infty}|c_k(x)|^{p(x)}\right)^{\frac{1}{p(x)}}. \tag{4.2.5}$$

Далее, из (4.2.5) получим

$$\|f(x,\cdot)\|_{L_{q(x)}(c,d)}^{p(x)} \le \sum_{k=1}^{\infty}(M_1(p)|c_k(x)|)^{p(x)}. \tag{4.2.6}$$

Поскольку при $n\to\infty$ $\left\|f(x,\cdot)-\sum_{k=1}^{n}c_k(x)\varphi_k(\cdot)\right\|_{L_{q(x)}(c,d)}\to 0$, то ясно, что функция f измерима на $[a,b]\times[c,d]$. Для $\forall\lambda>0$ из (4.2.6) получаем

$$\left(\frac{\|f(x,\cdot)\|_{L_{q(x)}(c,d)}}{\lambda}\right)^{p(x)} \le \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{M_1(p)|c_k(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}. \tag{4.2.7}$$

Если взять интеграл обеих частей (4.2.7) по отрезку $[a,b]$, будем иметь

$$\int_a^b\left(\frac{\|f(x,\cdot)\|_{L_{q(x)}(c,d)}}{\lambda}\right)^{p(x)}dx \le \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b\left(\frac{M_1(p)|c_k(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}dx.$$

Тогда

$$\inf\left\{\lambda>0:\int_a^b\left(\frac{\|f(x,\cdot)\|_{L_{q(x)}(c,d)}}{\lambda}\right)^{p(x)}dx\le 1\right\}\le\inf\left\{\lambda>0:\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b\left(\frac{M_1(p)|c_k(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}dx\le 1\right\}.$$

Отсюда имеем

$$\|f\|_{L_{q(x)}((a,b),L_{p(x)}(c,d))} \le \|M_1(p)\{c_k\}_{k\in N}\|_{l_{q(x)}(a,b)} = M_1(p)\|\{c_k\}_{k\in N}\|_{l_{q(x)}(a,b)},$$

т. е. справедливо неравенство (4.2.2). Теорема доказана.

Теорема 4.2.2. *Верны следующие условия:*

1) если $f \in L_{p(x)}((a,b), L_{p(x)}(c,d))$, $1 < p_- \le p(x) \le 2$, *и* $c_k(x) = \int\limits_c^d f(x,t)\varphi_k(t)dt$, $k \in N$, *то* $\{c_k\}_{k\in N} \in l_{p(x),p(x)-2}(a,b)$ *и*

$$\left\|\{c_k\}_{k\in N}\right\|_{l_{p(x),p(x)-2}(a;b)} \le \frac{AM_1(p)}{p_- - 1}\|f\|_{L_{p(x)}((a,b),L_{p(x)}(c,d))}; \qquad (4.2.8)$$

2) для любой последовательности $\{c_k\}_{k\in N} \in l_{q(x),q(x)-2}$, $2 \le q(x) \le q_+ < \infty$, *существует функция* $f \in L_{q(x)}((a,b), L_{q(x)}(c,d))$: $c_k(x) = \int\limits_c^d f(x,t)\varphi_k(t)dt$, $k \in N$, *и*

$$\|f\|_{L_{q(x)}((a,b),L_{q(x)}(c,d))} \le Aq_+ M_2(q)\left\|\{c_k\}_{k\in N}\right\|_{l_{q(x),q(x)-2}(a,b)}, \qquad (4.2.9)$$

где $M_2(q) = \max\left\{M^{1-\frac{2}{q_-}}, M^{1-\frac{2}{q_+}}\right\}$.

Доказательство. Пусть $f \in L_{p(x)}((a,b), L_{p(x)}(c,d))$. Тогда для почти всех $x \in [a,b]$ $f(x,\cdot) \in L_{p(x)}(c,d)$. По Теореме Пэли имеем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{p(x)-2}|c_k(x)|^{p(x)} < +\infty$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{p(x)-2}|c_k(x)|^{p(x)} \le \left(\frac{A}{p(x)-1}M^{\frac{2}{p(x)}-1}\right)^{p(x)}\|f\|^{p(x)}_{L_{p(x)}(c,d)}.$$

Отсюда ясно, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{p(x)-2}|c_k(x)|^{p(x)} \le \left(\frac{A}{p_- - 1}M_1(p)\right)^{p(x)}\|f\|^{p(x)}_{L_{p(x)}(c,d)}. \qquad (4.2.10)$$

Возьмем $\forall\lambda > 0$. Тогда из (4.2.10) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b k^{q(x)-2}\left(\frac{|c_k(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}dx \le \int_a^b\left(\frac{A}{p_- - 1}M_1(p)\right)^{p(x)}\left(\frac{\|f\|_{L_{p(x)}(c,d)}}{\lambda}\right)^{p(x)}dx.$$

Следовательно, имеем

$$\left\|\{c_k\}_{k\in N}\right\|_{l_{p(x),p(x)-2}(a;b)} \le \left\|\frac{AM_1(p)}{p_- - 1}f\right\|_{L_{p(x)}(a,b),L_{p(x)}(c,d))} = \frac{AM_1(p)}{p_- - 1}\|f\|_{L_{q(x)}((a,b),L_{p(x)}(c,d))},$$

т. е. справедливо неравенство (4.2.8).

Теперь установим 2). Предположим, что $\{c_k(x)\}_{k\in N}$ такая последовательность, что $\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b k^{q(x)-2}|c_k(x)|^{q(x)}dx<+\infty$. Согласно упоминавшемуся следствию для почти всех $x\in[a,b]$ $\sum_{k=1}^{\infty}k^{q(x)-2}|c_k(x)|^{q(x)}<+\infty$. Поэтому по Теореме Пэли для почти всех $x\in[a,b]$, существует функция $f(x,\cdot)\in L_{q(x)}(c,d)$ такая, что $f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(x)\varphi_k(t)$ и

$$\|f\|_{L_{q(x)}(c,d)}^{q(x)}\le (Aq(x))^{q(x)}M^{q(x)-2}\sum_{k=1}^{\infty}k^{q(x)-2}|c_k(x)|^{q(x)}\le$$

$$\le (Aq_+M_2(q))^{q(x)}\sum_{k=1}^{\infty}k^{q(x)-2}|c_k(x)|^{q(x)}\ . \tag{4.2.11}$$

Отсюда при $\forall\lambda>0$, разделив обе части неравенства (4.2.11) на $\lambda^{q(x)}$, а затем интегрируя обе части по отрезку $[a,b]$ получим

$$\int_a^b\left(\frac{\|f\|_{L_{q(x)}(c,d)}}{\lambda}\right)^{q(x)}dx\le\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b k^{q(x)-2}\left(Aq_+M_2(q)\frac{|c_k(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}dx\,. \tag{4.2.12}$$

Поэтому имеет место (4.2.9). Теорема доказана.

Применим полученные результаты к случаю системы экспонент $\{e^{\mathrm{int}}\}_{n\in Z}$.

Теорема 4.2.3. *Пусть* $f\in L_{q(x)}((a,b),W_{p(x)}^{m+1}(-\pi,\pi))$, $1<p_-\le p(x)\le 2$, $q(x)=\dfrac{p(x)}{p(x)-1}$, *и* $\dfrac{\partial^k f(x,-\pi)}{\partial t^k}=\dfrac{\partial^k f(x,\pi)}{\partial t^k}$, $k=\overline{0,m}$ *для почти всех* $x\in[a,b]$ *и* $c_n(x)=\int_a^b f(x,t)e^{-\mathrm{int}}dt$, $n\in Z$. *Тогда* $\varphi(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|n^m c_n(x)|\in L_{q(x)}(a,b)$, *и*

$$\|\varphi\|_{L_{q(x)}(a,b)}\le\alpha(p)\left\|\frac{\partial^{m+1}f}{\partial t^{m+1}}\right\|_{L_{q(x)}((a,b),L_{p(x)}(-\pi,\pi))}, \tag{4.2.13}$$

где $\alpha^{p_-}(p)=\sum_{\substack{n=-\infty,\\ n\ne 0}}^{+\infty}\dfrac{1}{|n|^{p_-}}$.

Доказательство. Имеем

$$c_n(x)=\frac{c_{n,m+1}(x)}{(in)^{m+1}},\quad c_{n,m+1}(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^{m+1}f(x,t)}{\partial t^{m+1}}e^{-\mathrm{int}}dt\,,$$

т. е. $\{c_{n,m+1}(x)\}_{n\in Z}$ - последовательность коэффициентов Фурье функции $\dfrac{\partial^k f(x,t)}{\partial t^k}$ по системе $\{e^{\mathrm{int}}\}_{n\in Z}$. В силу Теоремы 4.2.1 имеем $\{c_{n,m+1}\}_{n\in Z}\in l_{q(x)}(a,b)$ и

$$\left\|\{c_{n,m+1}\}_{n\in Z}\right\|_{l_{q(x)}(a,b)} \le \left\|\frac{\partial^{m+1} f}{\partial t^{m+1}}\right\|_{L_{q(x)}((a,b),L_{p(x)}(-\pi,\pi))}. \tag{4.2.14}$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера с показателем $p(x)$, получим

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|n^m c_n(x)\right| = \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{\left|c_{n,m+1}(x)\right|}{|n|} \le \left(\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{1}{|n|^{p(x)}}\right)^{\frac{1}{p(x)}}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|c_{n,m+1}(x)\right|^{q(x)}\right)^{\frac{1}{q(x)}} \le$$

$$\le \alpha(p)\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|c_{n,m+1}(x)\right|^{q(x)}\right)^{\frac{1}{q(x)}}. \tag{4.2.15}$$

Возведя обе части (4.2.15) в $q(x)$-ую степень, будем иметь

$$\varphi(x)^{q(x)} = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|n^m c_n(x)\right|\right)^{q(x)} \le \sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha(p)\left|c_{n,m+1}(x)\right|\right)^{q(x)}.$$

Отсюда для $\forall\lambda>0$ получим

$$\int_a^b\left(\frac{\varphi(x)}{\lambda}\right)^{q(x)}dx \le \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b\left(\frac{\alpha(p)\left|c_{n,m+1}(x)\right|}{\lambda}\right)^{q(x)}dx,$$

и поэтому $\|\varphi\|_{L_{q(x)}(a,b)} \le \alpha(p)\left\|\{c_{n,m+1}\}_{n\in Z}\right\|_{l_{q(x)}(a;b)}$. Тогда учитывая (4.2.14) получим (4.2.13). Теорема доказана.

Также имеет место следующая

Теорема 4.2.4. *Пусть функция* $f\in L_{q(x)}((a,b),W^m_{p(x)}(-\pi,\pi))$, $1<p_-\le p(x)\le 2$, $m\in N$, $q(x)=\dfrac{p(x)}{p(x)-1}$ *и для почти всех* $x\in[a,b]$ *имеет место* $\dfrac{\partial^k f(x,-\pi)}{\partial t^k}=\dfrac{\partial^k f(x,\pi)}{\partial t^k}$, $k=\overline{0,m-1}$, *и* $c_n(x)=\int_a^b f(x,t)e^{-\mathrm{int}}dt$, $n\in Z$. *Тогда* $\{n^m c_n\}_{n\in Z}\in l_{q(x)}(a,b)$ *и*

$$\left\|\{n^m c_n\}_{n\in Z}\right\|_{l_{q(x)}(a,b)} \le \left\|\frac{\partial^m f}{\partial t^m}\right\|_{L_{q(x)}((a,b),L_{p(x)}(-\pi,\pi))}.$$

Доказательство. Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству Теоремы 4.2.3.

4.3. О применении $l_{p,p-2}(a,b)$ аналога теоремы Пэли к решению смешанной задачи для одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка

Пусть T - некоторое положительное число. Обозначим через $L_{p,p-2}(0,\pi)$, $p \ge 2$, банахово пространство функций $f(x) \in L_p(0,\pi)$, для которых $\{f_n\}_{n\in N} \in l_{p,p-2}$, $f_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nxdx$, с нормой

$$\|f\|_{L_{p,p-2}(0,\pi)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}|f_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В случае, когда $f_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nxdx$, то соответствующее пространство будем обозначать через $L^c{}_{p,p-2}(0,\pi)$. Положим $L_p([0,T], L_{p,p-2}(0,\pi))$, $p \ge 2$, - банахово пространство функций $f(t,x) \in L_p(D)$, $D = (0,T)\times(0,\pi)$, с конечной нормой

$$\|f\|_{L_p([0,T],L_{p,p-2}(0,\pi))} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}\int_0^T |f_n(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $f_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t,x)\sin nxdx$.

Пусть X - некоторое банаховое пространство. Через $W_p^{(1)}((a,b),X)$ обозначается банахово пространство вектор функций $u:[a,b]\to X$ таких, что для $\forall t \in [0,T]$ существует в X сильный предел $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t} = u^{/}(t)$, снабженная нормой

$$\|u\|^p_{W_p^{(1)}((a,b),X)} = \int_a^b \|u(t)\|_X^p dt + \int_a^b \|u^{/}(t)\|_X^p dt < +\infty .$$

Пусть $B^{\alpha_0,\alpha_1,..\alpha_k}_{\beta_0,\beta_1,..,\beta_k,T}$ - пространство функций $u(t,x)$ вида

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx,$$

рассматриваемых на прямоугольнике D, для которых $u_n(t)\in C^{(k)}([0,T])$, с конечной нормой

$$\|u\|_{B^{\alpha_0,\alpha_1,..\alpha_k}_{\beta_0,\beta_1,..\beta_k T}}=\sum_{i=0}^{k}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\max_{0\le t\le T}\left|u_n^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right)^{\frac{1}{\beta_i}},$$

где $\alpha_i\ge 0$, $\beta_i\ge 1$, $i=\overline{0,k}$, $k\ge 0$ - целое число.

Рассмотрим пространство $B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,T}$, где $p\ge 2$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. При $p>2$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, пространство $B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,T}$ непрерывно вложено в пространство $B^{2,1}_{2,2,T}$ и имеет место соотношение

$$\|u\|_{B^{2,1}_{2,2,T}}\le\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{\frac{2-q}{2q}}\|u\|_{B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,T}}.$$

Очевидно, что если $u(t,x)\in B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,T}$, то из сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\|u_n\|_{C[0,T]}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|u_n'\|_{C[0,T]}$ имеем $u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x)\in C(\overline{D})$.

Замечание 4.3.1. *Для* $u(t,x)\in B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,T}$ *существуют частные производные*

$$u_{xx}(t,x)=-\sum_{n=1}^{\infty}n^2u_n(t)\sin nx,\ u_{tx}(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}nu_n'(t)\cos nx.$$

Кроме того, $u_{xx}(t,x),u_{tx}(t,x)\in C([0,T],L_{p,p-2}(0,\pi))$.

Действительно, $\forall t\in[0;T]$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2|u_n(t)|\right)^p n^{p-2}\le\sum_{n=1}^{\infty}(n^2\|u_n\|_{C[0,T]})^p n^{p-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{1+\frac{2}{q}}\|u_n\|_{C[0,T]}\right)^p<+\infty.$$

Тогда по Теореме 4.1.2, существует $f(t,x)\in L_p(0,\pi)$ такая, что $f(t,x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2u_n(t)\sin nx$ и

$$\int_0^{\pi} |f(t,x)|^p dx \le A_p \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} (n^2 |u_n(t)|)^p .$$

Отсюда получаем $f(t,x) \in C([0,T], L_{p,p-2}(0,\pi))$. Более того, имеет место $f(t,x) = u_{xx}(t,x)$. Действительно

$$f(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^x f(t,y)dy = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n(t) \int_0^x \sin nydy\right) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} nu_n(t)\cos ny\right)dy = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} nu_n(t)\int_0^x \cos nydy\right) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx\right) = u_{xx}(t,x).$$

Аналогично рассматривается частная производная u_{tx}.

Рассмотрим следующую смешанную задачу для уравнения

$$u_{tt}(t,x) - \alpha u_{txx}(t,x) = F(u)(t,x) \qquad (4.3.1)$$

с начальными и граничными условиями

$$u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x),\ 0 \le x \le \pi , \qquad (4.3.2)$$

$$u(t,\pi) = u(t,0) = 0,\ 0 \le t \le T , \qquad (4.3.3)$$

где $0 < \alpha$ - фиксированное число, F - заданный, вообще говоря, нелинейный оператор, φ и ψ - заданные функции.

Дадим определение обобщенного решения задачи (4.3.1)-(4.3.3).

Определение 4.3.1. *Функция* $u(t,x) \in B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}$ *(*q,p*-сопряженные числа), удовлетворяющая условию (4.3.2), называется обобщенным решением задачи (4.3.1)-(4.3.3), если для любой функции* $v(t,x) \in W_1^1([0,T], L_q(0,\pi))$ *такой, что* $v(T,x) = 0$ *для п. в. на* $[0,\pi]$, $v(t,0) = v(t,\pi) = 0$, $t \in [0,\pi]$, *выполняется интегральное тождество*

$$\int_0^T\int_0^{\pi} \{u_t(t,x)v_t(t,x) - \alpha u_{xx}(t,x)v_t(t,x) + F(u)(t,x)v(t,x)\}dxdt -$$

$$-\alpha\int_0^{\pi} \varphi^{//}(x)v(0,x)dx + \int_0^{\pi} \psi(x)v(0,x)dx = 0. \qquad (4.3.4)$$

Справедлива следующая

Лемма 4.3.1. *Пусть* $u(t,x)$ *является обобщенным решением задачи (4.3.1)-(4.3.3) и* $F(u)\in L_{p,p-2}([0,T],L_p(0,\pi))$. *Тогда коэффициенты* $u_n(t)$ *являются решениями следующей счетной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений*

$$u_n(t)=\varphi_n+\frac{1}{\alpha n^2}\left(1-e^{-\alpha n^2 t}\right)\psi_n+\frac{1}{\alpha n^2}\int_0^t F_n(u,\tau)\left(1-e^{-\alpha n^2(t-\tau)}\right)d\tau, \qquad (4.3.5)$$

где φ_n, ψ_n *и* $F_n(u,t)$ *- коэффициенты Фурье по системе* $\{\sin nx\}_{n\in N}$ *функций* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *и* $F(u)(t,x)$ *соответственно.*

Доказательство. Доказательство Леммы непосредственно вытекает из соответствующего результата в пространстве $B^{2,1}_{2,2,T}$ в силу вложения пространства $B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,T}$ в $B^{2,1}_{2,2,T}$. Лемма доказана.

Лемма 4.3.2. *Предположим, что выполнены условия*

1) $\varphi(x)\in C^{(1)}([0,\pi])\cap W_p^2(0;\pi)$, $\{n^2\varphi_n\}_{n\in N}\in l_{p,p-2}$, $\varphi(0)=\varphi(\pi)=0$;

2) $\psi(x)\in C([0,\pi])\cap W_p^1(0,\pi)$, $\{n\psi_n\}_{n\in N}\in l_{p,p-2}$, $\psi(0)=\psi(\pi)=0$.

Тогда $w(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}w_n(t)\sin nx\in B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,T}$, *где* $w_n(t)=\varphi_n+\frac{1}{\alpha n^2}\left(1-e^{-\alpha n^2 t}\right)\psi_n$.

Доказательство. Установим сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{1+\frac{2}{q}}\|w_n\|_{C[0,T]}\right)^p$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{2}{q}}\|w_n'\|_{C[0,T]}\right)^p$. Имеем $\|w_n\|_{C[0,T]}\le|\varphi_n|+\frac{1}{\alpha n^2}|\psi_n|$ и $\|w_n'\|_{C[0,T]}=|\psi_n|$. Поэтому, учитывая $\{n^2\varphi_n\}_{n\in N},\{n\psi_n\}_{n\in N}\in l_{p,p-2}$ получим

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{1+\frac{2}{q}}\|w_n\|_{C[0,T]}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{1+\frac{2}{q}}|\varphi_n|+\frac{1}{\alpha}n^{\frac{2}{q}}|\psi_n|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{1+\frac{2}{q}}|\varphi_n|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{1}{\alpha}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{2}{q}}|\psi_n|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2|\varphi_n|\right)^p n^{p-2}\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{1}{\alpha}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(n|\psi_n|\right)^p n^{p-2}\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty,$$

а также

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{2}{q}}\left\|w_n^{/}\right\|_{C[0,T]}\right)^p=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{2}{q}}|\psi_n|\right)^p=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n|\psi_n|\right)^p n^{p-2}<+\infty.$$

Следовательно, $w\in B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}$. Лемма доказана.

Также имеет место следующая

Лемма 4.3.3. *Пусть в пространстве* $L_p([0,T],L_{p,p-2}(0,\pi))$ *оператор* P *задан формулой*

$$P(f)(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha n^2}\int_0^t f_n(\tau)\left(1-e^{-\alpha n^2(t-\tau)}\right)d\tau\sin nx,$$

где $f_n(t)=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t,x)\sin nxdx$. *Тогда* $P:L_p([0,T],L_{p,p-2}(0,\pi))\to B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}$ *и имеет место*

$$\|P(f)\|_{B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}}\le L\|f\|_{L_p([0,T],L_{p,p-2}(0,\pi))},\tag{4.3.6}$$

где $L=\alpha^{-1}T^{\frac{1}{q}}+\alpha^{-\frac{1}{q}}q^{-\frac{1}{q}}$.

Доказательство. Для $\forall f\in L_p([0,T],L_{p,p-2}(0,\pi))$ имеем

$$\|P(f)\|_{B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n^{1+\frac{2}{q}}\max_{[0,T]}\left|\frac{1}{\alpha n^2}\int_0^t f_n(\tau)(1-e^{-\alpha n^2(t-\tau)})d\tau\right|\right\}^p\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n^{\frac{2}{q}}\max_{[0,T]}\left|\int_0^t f_n(\tau)e^{-\alpha n^2(t-\tau)}d\tau\right|\right\}^p\right)^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le\frac{1}{\alpha}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-2}\int_0^T|f_n(\tau)|^p d\tau\max_{[0,T]}\left(\int_0^t(1-e^{-\alpha n^2(t-\tau)})^q d\tau\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{2p}{q}}\int_0^T|f_n(\tau)|^p dt\max_{[0,T]}\left(\int_0^t e^{-\alpha n^2 q(t-\tau)}d\tau\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}\le\frac{T^{\frac{1}{q}}}{\alpha}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-2}\int_0^T|f_n(\tau)|^p d\tau\right)+$$

$$+\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{2p}{q}} \int_0^T |f_n(\tau)|^p dt \left(\frac{1}{\alpha n^2 q}\right)^{\frac{p}{q}} \max_{[0,T]}\left(1-e^{-\alpha n^2 qt}\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \frac{T^{\frac{1}{q}}}{\alpha}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}\int_0^T |f_n(\tau)|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{q}} q^{\frac{1}{q}}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T |f_n(\tau)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \frac{q^{\frac{1}{q}} T^{\frac{1}{q}} + \alpha^{\frac{1}{p}}}{\alpha q^{\frac{1}{q}}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}\int_0^T |f_n(\tau)|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}} = L\|f\|_{L_p([0,T],L_{p,p-2}(0,\pi))}.$$

Лемма доказана.

Теперь сформулируем теорему единственности обобщенного решения задачи (4.3.1)-(4.3.3).

Теорема 4.3.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $F(u) \in L_p([0,T], L_{p,p-2}(0,\pi))$, $u \in B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}$, $p \ge 2$;

2) существует функция $c(t) \in L_p(0,T)$ *: для* $\forall u, v \in B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}$ *имеет место*

$$\|F(u(t,\cdot)) - F(v(t,\cdot))\|_{L_{p,p-2}(0,\pi)} \le c(t)\|u-v\|_{B_{p,p,t}^{1+2/q,2/q}},\ t \in [0,T]. \tag{4.3.7}$$

Тогда задача (4.3.1)-(4.3.3) не может иметь более одного обобщенного решения.

Доказательство. Допустим противное, т.е. предположим, что задача (4.3.1)-(4.3.3) имеет по крайней мере два различных обобщенных решения $u(t,x)$ и $v(t,x)$. Пусть $\{u_n(t)\}_{n\in N}$ и $\{v_n(t)\}_{n\in N}$ последовательности коэффициентов функций $u(t,x)$ и $v(t,x)$ соответственно. Из Леммы 4.3.1 получаем

$$u(t,x) - v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n(t) - v_n(t)\right)\sin nx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha n^2}\int_0^t \left(F_n(u,\tau) - F_n(v,\tau)\right)\left(1-e^{-\alpha n^2(t-\tau)}\right)d\tau \sin nx = P(F(u)-F(v))(t,x).$$

Тогда $\forall t \in [0,T]$ согласно (4.3.7), используя (4.3.6), получим

$$\|u-v\|^p_{B_{p,p,t}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}} = \|P(F(u)-F(v))\|^p_{B_{p,p,t}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}} \le L^p \int_0^t c^p(\tau)\|u-v\|^p_{B_{p,p,\tau}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}} d\tau.$$

Отсюда, по Лемме Грануолла-Белмана, получаем $\|u-v\|^p_{B^{1+2/q,2/q}_{p,p,t}}=0$. Следовательно, $u(t,x)=v(t,x)$. Теорема доказана.

В следующей теореме доказывается существование и единственность обобщенного решения задачи (4.3.1)-(4.3.3).

Теорема 4.3.2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\varphi(x)\in C^{(1)}([0,\pi])\cap W^2_p(0,\pi)$, $\{n^2\varphi_n\}_{n\in N}\in l_{p,p-2}$, $\varphi(0)=\varphi(\pi)=0$;

2) $\psi(x)\in C([0,\pi])\cap W^1_p(0,\pi)$, $\{n\psi_n\}_{n\in N}\in l_{p,p-2}$, $\psi(0)=\psi(\pi)=0$;

3) $F(u)\in L_p([0,T],L_{p,p-2}(0,\pi))$, $u\in B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,T}$, $p\geq 2$, $\exists a(t),b(t)\in L_p(0,T)$:

$$\|F(u)(t,\cdot)\|_{L_{p,p-2}(0,\pi)}\leq a(t)+b(t)\|u\|_{B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,t}},\ t\in[0,T]; \tag{4.3.8}$$

4) $\exists c(t)\in L_p(0,T)$: $\forall u,v\in S(0,R)$

$$\|F(u)(t,\cdot)-F(v)(t,\cdot)\|_{L_{p,p-2}(0,\pi)}\leq c(t)\|u-v\|_{B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,t}},\ t\in[0,T], \tag{4.3.9}$$

где $R^p=A\exp\int_0^T B^p(t)dt$, $A=2^{p-1}\|w\|^p_{B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,T}}+L_0^p\|a\|^p_{L_p(0,T)}$, $B(t)=L_0 b(t)$, $L_0=2^{\frac{2}{q}}L$.

Тогда задача (4.3.1)-(4.3.3) имеет единственное обобщенное решение.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве $B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,T}$ оператор Q, заданный равенством $Q(u)=w+P(F(u))$. Используя (4.3.6), (4.3.8) получим

$$\|Q(u)\|^p_{B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,t}}\leq 2^{p-1}\left(\|w\|^p_{B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,t}}+\|P(F(u))\|^p_{B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,t}}\right)\leq$$

$$\leq 2^{p-1}\left(\|w\|^p_{B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,t}}+L^p\int_0^t\|F(u)\|^p_{L_{p,p-2}(0,\pi)}dt\right)\leq$$

$$\leq 2^{p-1}\left(\|w\|^p_{B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,t}}+2^{p-1}L^p\int_0^t(a^p(\tau)+b^p(\tau)\|u\|^p_{B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,\tau}})d\tau\right)=$$

$$=2^{p-1}\|w\|^p_{B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,t}}+L_0^p\int_0^t a^p(\tau)d\tau+L_0^p\int_0^t b^p(\tau)\|u\|^p_{B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,\tau}}d\tau\leq$$

$$\leq A+\int_0^t B^p(\tau)\|u\|^p_{B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,\tau}}d\tau. \tag{4.3.10}$$

Построим последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty} \subset B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}$ следующим образом:

$$u_0 = 0,\ u_k \in Q(u_{k-1}),\ k = 1,2,..,..$$

Согласно (4.3.10) для любого $t \in [0,T]$ получим

$$\|u_1\|^p_{B_{p,p,t}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}} = \|Q(u_0)\|^p_{B_{p,p,t}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}} \le A + A\int_0^t B^p(\tau)d\tau$$

$$\|u_2\|^p_{B_{p,p,t}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}} = \|Q(u_1)\|^p_{B_{p,p,t}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}} \le A + \int_0^t B^p(\tau)\|u_1\|^p_{B_{p,p,\tau}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}} d\tau \le$$

$$\le A + \int_0^t B^p(\tau)(A + A\int_0^\tau B^p(s)ds)d\tau = A + A\int_0^t B^p(\tau)d\tau + A\int_0^t B^p(\tau)\int_0^\tau B^p(s)dsd\tau =$$

$$= A(1 + \int_0^t B^p(\tau)d\tau + \int_0^t \frac{\frac{d}{dt}\left(\int_0^\tau B^p(s)ds\right)^2}{2}d\tau) = A(1 + \int_0^t B^p(\tau)d\tau + \frac{\left(\int_0^t B^p(\tau)d\tau\right)^2}{2}).$$

Продолжая процесс, аналогичным образом, получаем

$$\|u_k\|^p_{B_{p,p,t}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}} \le A(1 + \int_0^t B^p(\tau)d\tau + \ldots + \frac{\left(\int_0^t B^p(\tau)d\tau\right)^k}{k!}),\ k = 0,1,..,\ldots.$$

Отсюда, $\|u_k\|^p_{B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}} \le A\exp\int_0^T B^p(t)dt = R^p$, т. е. $u_k \in S(0,R)$, $k \in Z_+$. Изучим сходимость последовательности $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$. Для любых $n,k \in N$, учитывая (4.3.6) и (4.3.9), имеем

$$\|u_{n+k} - u_k\|^p_{B_{p,p,t}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}} = \|P(F(u_{n+k-1}) - F(u_{k-1}))\|^p_{B_{p,p,t}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}} \le$$

$$\le L^p\int_0^t \|F(u_{n+k-1}) - F(u_{k-1})\|^p_{L_{p,p-2}(0,\pi)}dt \le L^p\int_0^t c^p(\tau)\|u_{n+k-1} - u_{k-1}\|^p_{B_{p,p,\tau}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}} d\tau.$$

Тогда

$$\|u_{n+k} - u_k\|^p_{B_{p,p,t}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}} \le L^p\int_0^t c^p(\tau)\|u_{n+k-1} - u_{k-1}\|^p_{B_{p,p,\tau}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}} d\tau \le$$

$$\le L^p\int_0^t c^p(\tau)\left(L^p\int_0^\tau c^p(s)\|u_{n+k-1} - u_{k-1}\|^p_{B_{p,p,s}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}} ds\right)d\tau =$$

$$= L^{2p}\int_0^t c^p(\tau)\int_0^\tau c^p(s)ds\left\|u_{n+k-2}-u_{k-2}\right\|^p_{B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,\tau}}d\tau =$$

$$= = L^{2p}\int_0^t \frac{\frac{d}{d\tau}\left(\int_0^\tau c^p(s)ds\right)^2}{2}\left\|u_{n+k-2}-u_{k-2}\right\|^p_{B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,\tau}}d\tau \le \ldots \le$$

$$\ldots \le L^{pk}\int_0^t \frac{\frac{d}{d\tau}\left(\int_0^\tau c^p(s)ds\right)^k}{k!}\left\|u_n-u_0\right\|^p_{B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,\tau}}d\tau \le$$

$$\le L^{pk}\left\|u_n\right\|^p_{B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,t}}\int_0^t \frac{\frac{d}{d\tau}\left(\int_0^\tau c^p(s)ds\right)^k}{k!}d\tau = L^{pk}\left\|u_n\right\|^p_{B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,t}}\frac{\left(\int_0^t c^p(\tau)d\tau\right)^k}{k!}.$$

Таким образом, $\left\|u_{n+k}-u_k\right\|^p_{B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,t}} \le \dfrac{L^{pk}R^p\left\|c\right\|^{pk}_{L_p(0,T)}}{k!}$. Следовательно, $\{u_k\}_{k\in Z_+}$ фундаментальна в $B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,T}$, и тем самым сходится к некоторому элементу $u\in S(0,R)$. Далее, имеем

$$\left\|Q(u_k)-Q(u)\right\|_{B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,T}} = \left\|P(F(u_k)-F(u))\right\|_{B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,T}} \le$$

$$\le L\left\|F(u_k)-F(u)\right\|_{L_p([0,T],L_{p,p-2}(0,\pi))} \le L\left\|c\right\|_{L_p(0,T)}\left\|u_k-u\right\|_{B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,T}},$$

и поэтому, $\{Q(u_k)\}_{k\in Z_+}$ сходится в $B^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}_{p,p,T}$ к $Q(u)$. Таким образом, имеем

$$u(t,x) = Q(u(t,x)) = \sum_{n=1}^\infty u_n(t)\sin nx,$$

где

$$u_n(t) = \varphi_n + \frac{1}{\alpha n^2}\left(1-e^{-\alpha n^2 t}\right)\psi_n + \frac{1}{\alpha n^2}\int_0^t F_n(u,\tau)\left(1-e^{-\alpha n^2(t-\tau)}\right)d\tau.$$

Покажем, что $u(t,x)$ является обобщенным решением задачи (4.3.1)-(4.3.3). Очевидно, что

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^\infty u_n(0)\sin nx = \sum_{n=1}^\infty \varphi_n \sin nx = \varphi(x),$$

$$u_t(0,x) = \sum_{n=1}^\infty u_n^{/}(0)\sin nx = \sum_{n=1}^\infty \psi_n \sin nx = \psi(x).$$

Остается показать справедливость тождества (4.3.4). Возьмем $\forall m \in N$ и обозначим через

$$u_m(t,x) = \sum_{n=1}^{m} u_n(t) \sin nx\,,$$

$$J_m = \int_0^T \int_0^\pi \left\{ u_{m,t}(t,x) v_t(t,x) - \alpha u_{m,xx}(t,x) v_t(t,x) + F(u)(t,x) v(t,x) \right\} dxdt -$$

$$- \alpha \int_0^\pi \varphi^{//}(x) v(0,x) dx + \int_0^\pi \psi(x) v(0,x) dx\,. \qquad (4.3.11)$$

Имеем

$$\int_0^T \int_0^\pi u_{m,t}(t,x) v_t(t,x) dxdt = \int_0^T \int_0^\pi \sum_{n=1}^{m} u_n^{/}(t) \sin nx v_t(x,t) dxdt =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \int_0^\pi \Big(\int_0^T u_n^{/}(t) v_t(t,x) dt\Big) \sin nx dx = \sum_{n=1}^{m} \int_0^\pi \Big(u_n^{/}(t) v(t,x)\big|_0^T - \int_0^T u_n^{//}(t) v(t,x) dt\Big) \sin nx dx =$$

$$= -\int_0^\pi \sum_{n=1}^{m} \psi_n \sin nx v(0,x) dx - \int_0^T \int_0^n \sum_{n=1}^{m} u_n^{//}(t) \sin nx v(x,t) dxdt\,.$$

Также имеем

$$\int_0^T \int_0^\pi u_{m,xx}(t,x) v_t(t,x) dxdt = -\int_0^T \int_0^\pi \sum_{n=1}^{m} n^2 u_n(t) v_t(t,x) \sin nx dxdt =$$

$$= -\sum_{n=1}^{m} n^2 \int_0^\pi \Big(u_n(t) v(t,x)\big|_0^T - \int_0^T u_n^{/}(t) v(t,x) dt\Big) \sin nx dx =$$

$$= \int_0^\pi \sum_{n=1}^{m} n^2 \varphi_n \sin nx v(0,x) dx + \int_0^T \int_0^\pi \sum_{n=1}^{m} n^2 u_n^{/}(t) v(t,x) \sin nx dxdt\,.$$

Тогда

$$J_m = \int_0^T \left(\int_0^\pi \{F(u)(t,x) - \sum_{n=1}^{m} (u_n^{//}(t) \sin nx + \alpha n^2 u_n^{/}(t) \sin nx)\} v(t,x) dx \right) dt +$$

$$+ \int_0^\pi (\psi(x) - \sum_{n=1}^{m} \psi_n \sin nx) v(0,x) dx - \alpha \int_0^\pi (\varphi^{//}(x) + \sum_{n=1}^{m} n^2 \varphi_n \sin nx) v(0,x) dx =$$

$$= \int_0^T \left(\int_0^\pi \{F(u)(t,x) - \sum_{n=1}^{m} F_n(u,t) \sin nx\} v(t,x) dx \right) dt +$$

$$+\int_0^\pi (\psi(x)-\sum_{n=1}^m \psi_n \sin nx)v(0,x)dx-\alpha\int_0^\pi (\varphi^{//}(x)+\sum_{n=1}^m n^2\varphi_n \sin nx)v(0,x)dx\,.$$

Таким образом

$$|J_m|\le \left\|F(u)-\sum_{n=1}^m F_n(u,t)\sin nx\right\|_{L_p(D)}\|v(t,x)\|_{L_q(D)}+$$

$$+\left\|\psi-\sum_{n=1}^m \psi_n \sin nx\right\|_{L_p(0,\pi)}\|v(0,x)\|_{L_q(0,\pi)}+\left\|\varphi^{//}+\sum_{n=1}^m n^2\varphi_n \sin nx\right\|_{L_p(0,\pi)}\|v(0,x)\|_{L_q(0,\pi)}\to 0$$

при $m\to\infty$.

Переходя к пределу в (4.3.11) при $m\to\infty$, получаем справедливость интегрального тождества (4.3.4). Таким образом, $u(t,x)$ является обобщенным решением задачи (4.3.1)-(4.3.3). Единственность обобщенного решения следует из Теоремы 4.3.1. Теорема доказана.

Замечание 4.3.2. Отметим, что несмотря на то, что всякое обобщенное решение задачи (4.3.1)-(4.3.3) в пространстве $B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}$ является ее обобщенным решением в пространстве $B_{2,2,T}^{2,1}$, из условий Теоремы 4.3.2 вообще говоря не следуют условия существования и единственности обобщенного решения задачи (4.3.1)-(4.3.3) в случае $p=2$.

ГЛАВА V.
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ БАЗИСЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ГРАНД ЛЕБЕГА. ПРИЛОЖЕНИЯ К НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМ СПЕКТРАЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ

В последнее время в связи с приложениями в теории уравнений в частных производных, в теории аппроксимации, в гармоническом анализе и других различных областях математики возрос интерес к изучению задач в нестандартных пространствах. К таким пространствам относятся пространство Лебега с переменным показателем суммируемости, пространство Компанато, пространство Морри, пространство гранд Лебега и др. Пространства гранд Лебега были введены T.Iwaniec и C.Sbordone [177] в 1992 г. в связи с изучением свойства интегрируемости определителя якобиана в открытом ограниченном множестве. В последующем пространствам гранд Лебега были посвящены многочисленные работы авторов A.Fiorenza [131], A.Fiorenza, G.E.Karadzhov [132], B.Gupta, A. Fiorenza и P.Jain [145], T.Iwaniec и C.P.Sbordone [176], V.M.Kokilashvili, A.Meskhi, H.Rafeiro, S.Samko [183] и др.

Одним из важных вопросов спектральной теории дифференциальных операторов является изучение спектральных задач со спектральным параметром в граничных условиях. Задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях рассматривались в работах J.Walter [217], A.Schneider [208], C.T.Fulton [137], D.B.Hinton [150], А.А.Шкаликова [76]. В работах Е.И.Моисеева и Н.Ю.Капустина [37-39] для задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром входящее в граничные условия линейно, рассматривались вопросы базисности систем из собственных функций в лебеговых пространствах. Различные обобщения в этом направлении изучались в работах Н.Б.Керимова и З.С.Алиева [44], Н.Б.Керимова и В.С.Мирзоева [45] и др. В абстрактном виде вопрос дефектной базисности рассматривался в работе Б.Т.Билалова и Т.Р.Мурадова [97]. В работе Т.Б.Касумова [40] в абстрактной постановке найден критерий относительно дефектной базисности систем в банаховых пространствах.

Разрывные спектральные задачи со спектральным параметром в граничных условиях в лебеговых пространствах L_p изучались в работах Т.Б.Касумова и Ш.Дж.Маммедова [141], Т.Б.Касумова и А.А.Гусейнли [140], Б.Т.Билалова, Т.Б.Касумова и Г.В.Магеррамова [91], а в весовых лебеговых пространствах со степенным весом в работе Т.Б.Касумова, А.М.Ахтямова и Н.Р.Ахмедзаде [139]. Спектральные свойства разрывного дифференциального оператора также изучалась в работах В.М.Курбанова и Э.Дж.Ибадова [46], A.M.Gomilko и V.N.Pivovarchik [142]. В этой главе с помощью оператора сдвига определяется подпространство пространства гранд Лебега. Доказываются базисности системы экспонент, тригонометрических систем синусов и косинусов и ограниченность сингулярного оператора в этом подпространстве. Устанавливается базисность систем собственных функций одной разрывной спектральной задачи для дифференциального уравнения второго порядка в пространствах гранд Лебега и в их весовых вариантах с весом общего вида.

5.1. Сепарабельное подпространство пространства гранд Лебега

Пусть $\Omega \subset R^n$ - измеримое множество с конечной лебеговой мерой $|\Omega|$ и $1 < p < +\infty$. Через $L_{p)}(\Omega)$ обозначается пространство гранд Лебега измеримых на Ω функций f таких, что

$$\|f\|_{p)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < +\infty .$$

$L_{p)}(\Omega)$ является несепарабельным банаховым пространством с нормой $\|\cdot\|_{p)}$.

Рассмотрим в $L_{p)}(a,b)$ оператор сдвига

$$T_\delta f(x) = \begin{cases} f(x+\delta), x+\delta \in [a,b], \\ 0, x+\delta \in R \setminus [a,b], \end{cases} \quad \delta > 0 .$$

Обозначим через $\tilde{G}_{p)}(a,b)$ - линейное многообразие, состоящее из функций $f \in L_{p)}(a,b)$ удовлетворяющих условию

$$\|T_\delta f - f\|_{p)} \to 0,\ \delta \to 0.$$

Пусть $G_{p)}(a,b)$ замыкание $\tilde{G}_{p)}(a,b)$ в $L_{p)}(a,b)$. Имеет место строгое вложение $L_p(a,b) \subset G_{p)}(a,b)$.

Следующая теорема характеризует подпространство $G_{p)}(a,b)$.

Теорема 5.1.1. *Множество* $C^\infty[a,b]$ *плотно в* $G_{p)}(a,b)$.

Доказательство. Возьмем произвольное число $\eta > 0$ и произвольную функцию $f \in G_{p)}(a,b)$. Через $\omega_\eta(t)$ обозначим следующее ядро

$$\omega_\eta(t) = \begin{cases} c_\eta \exp(-\dfrac{\eta^2}{\eta^2 - t^2}), & |t| \le \eta \\ 0, & |t| > \eta \end{cases},$$

где постоянная c_η такая, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_\eta(t)dt = 1$. Пусть функция f_η есть свертка с ядром $\omega_\eta(\cdot)$, т. е.

$$f_\eta(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)\omega_\eta(s)ds = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_\eta(t-s) f(s)ds.$$

Корректность такого определения следует из включения $L_{p)}(a,b) \subset L_1(a,b)$. Очевидно, что $f_\eta(t)$ - бесконечно дифференцируемая функция. Используя неравенство Минковского, получим

$$\|f - f_\eta\|_{p)} = \left\| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\cdot)\omega_\eta(s)ds - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\cdot - s)\omega_\eta(s)ds \right\|_{p)} = \left\| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [f(\cdot - s) - f(\cdot)]\omega_\eta(s)ds \right\|_{p)} =$$

$$= \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{b-a} \int\limits_a^b \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [f(t-s) - f(t)]\omega_\eta(s)ds \right|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \le$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_\eta(s) \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{b-a} \int\limits_0^1 |f(t-s) - f(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} ds \le$$

$$\le c_p \sup_{|s|\le\eta} \| f(\cdot - s) - f(\cdot)\|_{p)} \to 0\,,\ \eta \to 0\,.$$

Следовательно, $C^\infty[a,b]$ плотно в $G_{p)}(a,b)$. Теорема доказана.

Теорема 5.1.2. *Множество* $C_0^\infty[a,b]$ *плотно в* $G_{p)}(a,b)$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\eta > 0$ и произвольную функцию $f \in G_{p)}(a,b)$. По Теореме 5.1.1 существует $g \in C^\infty[a,b]$ такая, что

$$\| f - g\|_{p)} < \frac{\eta}{3}. \tag{5.1.1}$$

Выберем число $\delta > 0$ так, чтобы $\delta < \frac{b-a}{2}\left(\frac{\eta}{3(p-1)\|g\|_\infty}\right)^p$. Рассмотрим интервалы $E_\delta^+ = (b-\delta, b)$ и $E_\delta^- = (a, a+\delta)$ длины δ и определим функцию

$$g_\delta(t) = \begin{cases} g(t), t \in (a,b) \setminus (E_\delta^+ \cup E_\delta^-) \\ 0, t \in E_\delta^+ \cup E_\delta^- \end{cases}.$$

Имеем

$$\|g - g_\delta\|_{p)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\int_{E_\delta^+\cup E_\delta^-} |g(t)|^{p-\varepsilon} dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \le$$

$$\le \|g\|_\infty \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{b-a}2\delta\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \|g\|_\infty (p-1)\left(\frac{2\delta}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\eta}{3}. \tag{5.1.2}$$

Положим

$$g_{\delta,\tau}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\delta(t-s)\omega_\tau(s)ds\,,\ \tau \in R\,.$$

Ясно, что при $\tau < \frac{\delta}{2}$ имеет место $g_{\delta,\tau} \in C_0^\infty[a,b]$. Так как $\|g_\delta - g_{\delta,\tau}\|_{p)} \to 0$ при $\tau \to 0$, то существует $\tau < \frac{\delta}{2}$ такое, что

$$\|g_\delta - g_{\delta,\tau}\|_{p)} < \frac{\eta}{3}. \tag{5.1.3}$$

Следовательно, используя (5.1.1), (5.1.2) и (5.1.3) получим

$$\|f - g_{\delta,\tau}\|_{p)} \le \|f - g\|_{p)} + \|g - g_\delta\|_{p)} + \|g_\delta - g_{\delta,\tau}\|_{p)} < \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} = \eta\,,$$

т. е. $C_0^\infty[a,b]$ плотно в $G_{p)}(a,b)$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы и из известного ([182], стр. 742) результата относительно замыкании $C_0^\infty[a,b]$ в $L_{p)}(a,b)$ вытекает, что подпространство $G_{p)}(a,b)$ состоит из функций $f \in L_{p)}(a,b)$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon \int_a^b |f(t)|^{p-\varepsilon} dt = 0 \cdot$$

Теперь перейдем к вопросу инвариантности подпространства $G_{p)}(a,b)$ при сингулярном операторе.

Пусть $\Gamma = \{t \in C : t = t(s), 0 \le s \le \ell < +\infty\}$ простая спрямляемая кривая. Положим $D(t,r) = \Gamma \cap B(t,r)$, где $B(t,r) = \{z \in C : |z-t| < r\}$, $t \in \Gamma$. Кривая Γ называется Карлесоновой, если $\exists c_0 > 0 : |D(t,r)| \le c_0 r$, $t \in \Gamma$.

Рассмотрим следующий сингулярный оператор

$$S_\Gamma(f)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - t} d\xi \, , \; t \in \Gamma \, .$$

Известно ([181], стр. 6), что сингулярный оператор S_Γ является ограниченным в $L_{p)}(\Gamma)$, $1 < p < +\infty$, в том и только в том случае, когда Γ - Карлесоновая кривая.

Пусть $\gamma = \{\tau : |\tau| = 1\}$ - единичная окружность. Рассмотрим оператор отождествления $T : L_{p)}(\gamma) \to L_{p)}(-\pi,\pi)$, определенный по формуле $Tf(t) = f(e^{it})$, $t \in [-\pi,\pi]$. Обозначим через $G_{p)}(\gamma)$ образ $G_{p)}(-\pi,\pi)$ при отображении T^{-1}. В следующей теореме доказывается инвариантность $G_{p)}(\gamma)$ относительно сингулярного оператора S_γ.

Теорема 5.1.3. *Оператор* S_γ *ограниченно действует в* $G_{p)}(\gamma)$.

Доказательство. Возьмем $\forall f \in G_{p)}(\gamma)$ и $\forall \varepsilon > 0$. Тогда из Теоремы 5.1.2 следует, что существует $g \in L_p(\gamma)$ такой, что

$$\|f - g\|_{p)} < \varepsilon \, .$$

Тогда из ограниченности S_γ *в* $L_{p)}(\gamma)$ следует, что

$$\left\| S_\gamma(f) - S_\gamma(g) \right\|_{p)} \le \left\| S_\gamma \right\| \left\| f - g \right\|_{p)} < \left\| S_\gamma \right\| \varepsilon .$$

Отсюда в силу произвольности $\forall \varepsilon > 0$ и $S_\gamma(g) \in L_p(\gamma)$ следует, что $S_\gamma(f)$ принадлежит замыканию $L_p(\gamma)$ в $L_{p)}(\gamma)$, т. е. $S_\gamma(f) \in G_{p)}(\gamma)$. Теорема доказана.

5.2. Базисность системы экспонент и тригонометрических систем в сепарабельном подпространстве пространства гранд Лебега

Рассмотрим вопрос базисности системы экспонент $\left\{ e^{\mathrm{int}} \right\}_{n \in Z}$ в подпространстве $G_{p)}(-\pi, \pi)$.

В следующей теореме устанавливается минимальность системы экспонент $\left\{ e^{\mathrm{int}} \right\}_{n \in Z}$ в пространстве $L_{p)}(-\pi, \pi)$.

Теорема 5.2.1. *Система* $\left\{ e^{\mathrm{int}} \right\}_{n \in Z}$ *минимальна в* $L_{p)}(-\pi, \pi)$, $1 < p < +\infty$.

Доказательство. Рассмотрим систему функционалов по формуле

$$\nu_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-\mathrm{int}} dt, \; f \in L_{p)}(-\pi, \pi), \; n \in Z .$$

Покажем ограниченность функционала $\nu_n(\cdot)$. Для любого $\varepsilon \in (0, p-1)$ имеем

$$\left| \nu_n(f) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-\mathrm{int}} dt \right| \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) \right| dt \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) \right|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} (2\pi)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} = \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) \right|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \le \varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \left\| f \right\|_{p)} ,$$

т. е. функционал $\nu_n(\cdot)$ ограничен. С другой стороны, имеем

$$\nu_n(e^{imt}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-m)t} dt = \delta_{nm} ,$$

т. е. системы $\left\{ e^{\mathrm{int}} \right\}_{n \in Z}$ и $\left\{ \nu_n \right\}_{n \in Z}$ биортогональны. Таким образом, система $\left\{ e^{\mathrm{int}} \right\}_{n \in Z}$ минимальна в $L_{p)}(-\pi, \pi)$. Теорема доказана.

В следующей теореме устанавливается полнота системы экспонент $\left\{ e^{\mathrm{int}} \right\}_{n \in Z}$ в пространстве $G_{p)}(-\pi, \pi)$.

Теорема 5.2.2. *Система экспонент* $\{e^{\mathrm{int}}\}_{n\in Z}$ *полна в пространстве* $G_{p)}(-\pi,\pi)$, $1<p<+\infty$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\eta>0$ и произвольную функцию $f\in G_{p)}(-\pi,\pi)$. Тогда по Теореме 5.1.2 существует $g_\eta\in C_0^\infty[-\pi,\pi]$ такая, что

$$\left\| f-g_\eta \right\|_{p)}<\eta. \tag{5.2.1}$$

Известно, что последовательность частичных сумм ряда Фурье функции g_η равномерно сходится к g_η. Тогда

$$\exists m_0 \quad \forall m>m_0: \sup_{t\in[-\pi;\pi]}\left|g_\eta(t)-S_m(t)\right|<\eta,$$

где $S_m(t)=\sum_{n=-m}^{m}\nu_n(g_\eta)e^{\mathrm{int}}$, $m\in N_0$. Тогда

$$\left\|g_\eta-S_m\right\|_{p)}=\sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|g_\eta(t)-S_m(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}<\eta\sup_{0<\varepsilon<p-1}\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}=(p-1)\eta. \tag{5.2.2}$$

Следовательно, используя (5.2.1) и (5.2.2), получаем

$$\left\|f-S_m\right\|_{p)}\le\left\|f-g_\eta\right\|_{p)}+\left\|g_\eta-S_m\right\|_{p)}<\eta+\eta(p-1)=p\eta.$$

Отсюда следует, что $\{e^{\mathrm{int}}\}_{n\in Z}$ полна в пространстве $G_{p)}(-\pi,\pi)$. Теорема доказана.

А теперь докажем следующую основную теорему о базисности системы экспонент $\{e^{\mathrm{int}}\}_{n\in Z}$ в пространстве $G_{p)}(-\pi,\pi)$.

Теорема 5.2.3. *Система экспонент* $\{e^{\mathrm{int}}\}_{n\in Z}$ *образует базис в пространстве* $G_{p)}(-\pi,\pi)$, $1<p<+\infty$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\eta>0$ и произвольную функцию $f\in G_{p)}(-\pi,\pi)$. В силу Теорем 5.2.1 и 5.2.2 система экспонент $\{e^{\mathrm{int}}\}_{n\in Z}$ полна и минимальна в $G_{p)}(-\pi,\pi)$. Рассмотрим систему проекторов

$$P_m(f)(x)=\sum_{n=-m}^{m}\nu_n(f)e^{inx},\ f\in G_{p)}(-\pi,\pi),\ m\in Z.$$

Преобразуем $P_m(f)$ следующим образом

$$P_m(f)(x)=\sum_{n=-m}^{m}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-\mathrm{int}}dt\right)e^{inx}=$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{n=-m}^{m} e^{in(x-t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_m(x-t)dt,$$

где $K_m(t) = \dfrac{e^{-imt} - e^{i(m+1)t}}{1-e^{it}}$. Поэтому

$$P_m(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_m(x-t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)e^{i(m+1)t}}{e^{it}-e^{ix}}dte^{-imx} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)e^{-imt}}{e^{it}-e^{ix}}dte^{i(m+1)x}. \tag{5.2.3}$$

Выражение (5.2.3) можно представить в виде

$$P_m(f)(x) = e^{-imx}S_\gamma T^{-1}(f(\cdot)e_m(\cdot)) - e^{i(m+1)x}S_\gamma T^{-1}(f(\cdot)e_{-(m+1)}(\cdot)), \tag{5.2.4}$$

где S_γ - сингулярный оператор в $L_{p)}(-\pi,\pi)$. Отсюда, учитывая ограниченность сингулярного оператора S_γ в $L_{p)}(-\pi,\pi)$ получим

$$\|P_m(f)\|_{p)} \le \left\|S_\gamma T^{-1}(fe_m)\right\|_{p)} + \left\|S_\gamma T^{-1}(fe_{-(m+1)})\right\|_{p)} \le 2\|S_\gamma\|\|f\|_{p)},$$

т. е. система $\{P_m\}_{m\in N}$ равномерно ограничена. Таким образом, согласно критерию базисности, система экспонент $\{e^{\text{int}}\}_{n\in Z}$ образует базис в пространстве $G_{p)}(-\pi,\pi)$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим вопрос базисности тригонометрических систем $\{\sin nt\}_{n\in N}$ и $\{\cos nt\}_{n\in N_0}$ в пространстве $L_{p)}(0,\pi)$. Верна следующая

Теорема 5.2.4. *Системы синусов* $\{\sin nt\}_{n\in N}$ *и косинусов* $\{\cos nt\}_{n\in N_0}$ *образуют базисы в пространстве* $G_{p)}(0,\pi)$, $1<p<+\infty$.

Доказательство. Сначала рассмотрим систему синусов $\{\sin nt\}_{n\in N}$. Покажем минимальность системы $\{\sin nt\}_{n\in N}$ в пространстве $L_{p)}(0,\pi)$, $1<p<+\infty$. Определим систему линейных функционалов

$$g_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin ntdt,\ f\in L_{p)}(0,\pi),\ n\in N.$$

Для $\forall f\in L_{p)}(0,\pi)$ имеем

$$|g_n(f)| = \frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi} f(t)\sin ntdt\right| \le \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|f(t)|dt \le$$

$$\le \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}|f(t)|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\pi^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} = 2\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{\pi}|f(t)|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \le 2\varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}}\|f\|_{p)},$$

где $\varepsilon \in (0, p-1)$. Таким образом, g_n является линейным непрерывным функционалом в $L_{p)}(0,\pi)$. С другой стороны, легко показать, что

$$g_n(\sin mt) = \delta_{nm},$$

т. е. системы $\{\sin nt\}_{n\in N}$ и $\{g_n\}_{n\in N}$ биортогональны, и значит, система $\{\sin nt\}_{n\in N}$ минимальна в пространстве $L_{p)}(0,\pi)$.

Возьмем $\forall f \in G_{p)}(0,\pi)$. Продолжим функцию f нечетным образом на $[-\pi,\pi]$ и обозначим ее продолжение через $F(t)$. Имеем

$$F(t) = \begin{cases} f(t), t\in[0,\pi] \\ -f(-t), t\in[-\pi,0) \end{cases}.$$

Ясно, что $F \in L_{p)}(-\pi,\pi)$ и

$$\|F\|_{L_{p)}(-\pi,\pi)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(t)|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{\pi}|f(t)|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \|f\|_{L_{p)}(0,\pi)}.$$

Легко показать, что $F \in G_{p)}(-\pi,\pi)$. Так как по Теореме 5.2.3 система $\{e^{\mathrm{int}}\}_{n\in Z}$ образует базис в $G_{p)}(-\pi,\pi)$, то имеет место разложение $F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\mathrm{int}}$ и для коэффициентов c_n имеем

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)e^{-\mathrm{int}}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}f(t)e^{-\mathrm{int}}dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}f(t)e^{\mathrm{int}}dt =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}f(t)(e^{\mathrm{int}} - e^{-\mathrm{int}})dt = \frac{1}{\pi i}\int_0^{\pi}f(t)\sin nt dt = \frac{1}{2i}g_n(f),\ n\in N.$$

С другой стороны, ясно что $c_{-n} = -c_n$. Поэтому для $\forall m \in N$ получим

$$\sum_{n=-m}^{m}c_n e^{\mathrm{int}} = \sum_{n=1}^{m}c_n e^{\mathrm{int}} - \sum_{n=1}^{m}c_n e^{-\mathrm{int}} = \sum_{n=1}^{m}c_n(e^{\mathrm{int}} - e^{-\mathrm{int}}) = 2i\sum_{n=1}^{m}c_n \sin nt = \sum_{n=1}^{m}g_n(f)\sin nt.$$

Легко показать, что $F(t) - \sum_{n=-m}^{m}c_n e^{\mathrm{int}}$ является нечетным продолжением $f(t) - \sum_{n=1}^{m}g_n(f)\sin nt$ на $[-\pi,\pi]$. Поэтому для $\forall m \in N$ получаем

$$\left\| f-\sum_{n=1}^{m} g_n(f)\sin nt \right\|_{L_p(0,\pi)} = \left\| F-\sum_{n=-m}^{m} c_n e^{\mathrm{int}} \right\|_{L_{p)}(-\pi,\pi)} .$$

Отсюда переходя к пределу при $m\to\infty$ получим

$$f(t)=\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(f)\sin nt ,$$

т. е. $\{\sin nt\}_{n\in N}$ образует базис в $G_{p)}(0,\pi)$, $1<p<+\infty$.

Аналогичным образом доказывается базисность системы косинусов $\{\cos nt\}_{n\in N_0}$ в пространстве $G_{p)}(0,\pi)$, $1<p<+\infty$. Теорема доказана.

5.3. Базисности системы экспонент и тригонометрических систем в весовых сепарабельных подпространствах пространства гранд Лебега

Пусть $\rho:[a,b]\to R_+$ - некоторая весовая функция. Через $A_p(a,b)$, $1<p<+\infty$, обозначается класс Макенхоупта, т. е. класс весовых функций $\rho(t)$ удовлетворяющих условию

$$\sup_{I\subset[a,b]} \frac{1}{|I|}\int_I \rho(t)dt\left(\frac{1}{|I|}\int_I \rho(t)^{-\frac{1}{p-1}}dt\right)^{p-1} < +\infty .$$

Пусть $L_{p),\rho}(a,b)$ весовое банахово пространство гранд Лебега измеримых на $[a,b]$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{p),\rho}(a,b)} = \|f\rho\|_{L_{p)}(a,b)} .$$

Имеет место следующая

Лемма 5.3.1. *Пусть весовая функция* ρ *принадлежит классу* $A_p(0,1)$, $1<p<+\infty$. *Тогда существует число* $r_0\in(1,+\infty)$ *такое, что для* $\forall r\in(1,r_0)$ *имеет место непрерывное вложение* $L_{p),\rho}(0,1)\subset L_r(0,1)$.

Доказательство. Сначала теорему докажем для случая пространства $L_{p,\rho}(0,1)$. Из $\rho\in A_p(0,1)$ следует, что существует число $0<\varepsilon<p-1$, что верно включение $\rho\in A_{p-\varepsilon}(0,1)$. Теперь выберем $r_0\in(1,p)$ так, чтобы

$$\frac{p-\varepsilon}{p-\varepsilon-1}=\frac{pr_0}{p-r_0}. \qquad (5.3.1)$$

Из (5.3.1) получим

$$\frac{p-\varepsilon}{p-\varepsilon-1}>\frac{pr}{p-r}, \ \forall r\in(1,r_0). \qquad (5.3.2)$$

Так как справедливо включение $\rho^{-1}\in\left(L_{p-\varepsilon}(0,1)\right)^*$, то из (5.3.2) следует, что для $\forall r\in(1,r_0)$ также имеет место включение $\rho^{-r}\in\left(L_{\frac{p}{r}}(0,1)\right)^*$. Тогда для $\forall f\in L_{p,\rho}(0,1)$ представив $|f(t)|^r=|f(t)\rho(t)|^r\cdot\rho^{-r}(t)$ из принадлежности $|f(t)\rho(t)|^r\in L_{\frac{p}{r}}(0,1)$ и принадлежности $\rho^{-r}\in\left(L_{\frac{p}{r}}(0,1)\right)^*$ следует, что $f\in L_r(0,1)$, для $\forall r\in(1,r_0)$. Действительно, используя неравенство Гельдера с показателем $\frac{p}{r}$, обозначив $c_{p,r}(\rho)=\left(\int_0^1\rho(t)^{-\frac{pr}{p-r}}dt\right)^{\frac{p-r}{pr}}<+\infty$, получим

$$\left(\int_0^1|f(t)|^r dt\right)^{\frac{1}{r}}=\left(\int_0^1|f(t)\rho(t)|^r\rho^{-r}(t)dt\right)^{\frac{1}{r}}\le$$

$$\le c_{p,r}(\rho)\left(\int_0^1|f(t)\rho(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty. \qquad (5.3.3)$$

Далее, пусть число $0<\varepsilon<p-1$ такое, что верно включение $\rho\in A_{p-\varepsilon}(0,1)$. В силу доказанного существует $r_0\in(1,+\infty)$ такое, что для $\forall r\in(1,r_0)$ имеет место вложение $L_{p-\varepsilon,\rho}(0,1)\subset L_r(0,1)$. Таким образом, согласно вложению $L_{p),\rho}(0,1)\subset L_{p-\varepsilon,\rho}(0,1)$ получим вложение $L_{p),\rho}(0,1)\subset L_r(0,1)$. Наконец, учитывая (5.3.3) получим

$$\|f\|_{L_r(0,1)}\le c_{p,r}(\rho)\|f\|_{L_{p-\varepsilon,\rho}(0,1)}\le c_{p,r}(\rho)\varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}}\|f\|_{L_{p),\rho}(0,1)},$$

т. е. вложение непрерывно. Лемма доказана.

Обозначим через $G_{p),\rho}(a,b)$ подпространство пространства $L_{p),\rho}(a,b)$ функций f таких, что $\rho f \in G_{p)}(a,b)$.

В следующей теореме устанавливается базисность классической системы экспонент в пространствах $G_{p),\rho}(-1,1)$.

Теорема 5.3.1. *Пусть весовая функция* ρ *принадлежит классу* $A_p(-1,1)$. *Тогда система* $\{e^{in\pi x}\}_{n\in Z}$ *образует базис в пространстве* $G_{p),\rho}(-1,1)$, $1<p<+\infty$.

Доказательство. Несложно показать, что система функционалов $\{v_n\}_{n\in Z}$ заданных равенством

$$< f, v_n >= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)e^{-in\pi x}dx,\ n\in Z,$$

является биортогональной системой системы $\{e^{in\pi x}\}_{n\in Z}$. Из результатов [148] известно, что при условии принадлежности $\rho\in A_p(-1,1)$ система экспонент $\{e^{in\pi x}\}_{n\in Z}$ образует базис в пространстве $L_{p,\rho}(-1,1)$. Тогда из полноты $L_{p,\rho}(-1,1)$ в $G_{p),\rho}(-1,1)$, с учетом непрерывного вложения $L_{p,\rho}(-1,1)\subset G_{p),\rho}(-1,1)$ получаем, что для $\forall f\in G_{p),\rho}(-1,1)$ справедливо однозначное разложение

$$f=\sum_{n\in Z} c_n e^{in\pi x}. \tag{5.3.4}$$

Действительно, для $\forall\delta>0$ существует $g\in L_{p,\rho}(-1,1)$ такое, что

$$\|f-g\|_{L_{p),\rho}(-1,1)}<\frac{\delta}{2}. \tag{5.3.5}$$

В силу базисности системы $\{e^{in\pi x}\}_{n\in Z}$ в пространстве $L_{p,\rho}(-1,1)$ имеет место однозначное разложение $g=\sum_{n\in Z}< g, v_n > e^{in\pi x}$. Следовательно, существует $m_0\in N$, что для $\forall m$: $m\ge m_0$

$$\left\| g-\sum_{n=-m}^{m}< g, v_n > e^{in\pi x}\right\|_{L_{p,\rho}(-1,1)}<\frac{\delta}{2c}, \tag{5.3.6}$$

где число $c>0$ такое, что

$$\|f\|_{L_{p),\rho}(-1,1)}\le c\|f\|_{L_{p,\rho}(-1,1)},\ f\in L_{p,\rho}(-1,1).$$

Тогда из (5.3.5) и (5.3.6) для $\forall m:\ m \ge m_0$ получим

$$\left\| f - \sum_{n=-m}^{m} < g, v_n > e^{in\pi x} \right\|_{L_{p),\rho}(-1,1)} < \delta,$$

т. е. $\forall f \in G_{p),\rho}(-1,1)$ имеет место разложение (5.3.4). Единственность разложения следует из минимальности $\{e^{in\pi x}\}_{n\in Z}$ в $L_{p),\rho}(-1,1)$. Теорема доказана.

Теперь установим базисность тригонометрических систем в весовых пространствах гранд Лебега.

Теорема 5.3.2. *Пусть весовая функция ρ принадлежит классу $A_p(0,1)$. Тогда система синусов $\{\sin \pi nx\}_{n\in N}$ и косинусов $\{\cos \pi nx\}_{n\in Z_+}$ образуют базис в пространстве $G_{p),\rho}(0,1)$, $1 < p < +\infty$.*

Доказательство. Пусть $\theta(x)$ - четное продолжение $\rho(x)$ на $[-1,1]$:

$$\theta(x) = \begin{cases} \rho(t), t \in [0,1] \\ \rho(-t), t \in [-1,0]. \end{cases}$$

Покажем, что из $\rho \in A_p(0,1)$ следует, что $\theta \in A_p(-1,1)$. Для произвольного интервала $I \subset [-1,1]$ имеет место $I = I_1 \cup I_2$, где $I_1 = I \cap [0,1]$ и $I_2 = I \cap [-1,0]$. Рассмотрим множество

$$I_+ = \begin{cases} I_1, |I_2| \le |I_1| \\ I_2, |I_1| \le |I_2| \end{cases}.$$

Пусть $J = I_+ \cup I_-$, где I_- - множество чисел противоположных числам множества I_+. Очевидно, что $I \subset J \subset [-1,1]$. Имеем

$$\sup_{I\subset[-1,1]} \frac{1}{|I|}\int_I \theta(t)dt \left(\frac{1}{|I|}\int_I \theta(t)^{-\frac{1}{p-1}} dt \right)^{p-1} \le \sup_{I\subset[-1,1]} \frac{1}{|I_+|}\int_J \theta(t)dt \left(\frac{1}{|I_+|}\int_J \theta(t)^{-\frac{1}{p-1}} dt \right)^{p-1} =$$

$$\sup_{I\subset[-1,1]} \frac{2}{|I_+|}\int_{I_+} \theta(t)dt \left(\frac{2}{|I_+|}\int_{I_+} \theta(t)^{-\frac{1}{p-1}} dt \right)^{p-1} = 2^p \sup_{I\subset[0,1]} \frac{1}{|I|}\int_I \rho(t)dt \left(\frac{1}{|I|}\int_I \rho(t)^{-\frac{1}{p-1}} dt \right)^{p-1} < +\infty \cdot$$

Возьмем произвольную функцию $f \in G_{p)}(0,1)$ и продолжим ее нечетным образом, а именно пусть

$$F(t) = \begin{cases} f(t), t \in [0,1] \\ -f(-t), t \in [-1,0]. \end{cases}$$

Имеем

$$\|F\|_{L_{p),\theta}(-1,1)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\int_{-1}^{1}|F(t)\theta(t)|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\varepsilon\int_{0}^{1}|f(t)\rho(t)|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \|f\|_{L_{p),\theta}(0,1)} < +\infty,$$

т. е. $F \in L_{p),\theta}(-1,1)$. Ясно, что $F \in G_{p),\theta}(-1,1)$. Тогда можно разложить F по базису $\{e^{in\pi t}\}_{n\in Z}$ в виде $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\pi x}$. Для коэффициентов c_n имеем

$$c_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}F(t)e^{-in\pi t}dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{1}f(t)e^{-in\pi t}dt - \frac{1}{2}\int_{0}^{1}f(t)e^{in\pi t}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}f(t)(e^{in\pi t}-e^{-in\pi t})dt = \frac{1}{i}\int_{0}^{1}f(t)\sin\pi ntdt = \frac{1}{2i} < f, g_n >, \; n \in N.$$

где $< f, g_n >= 2\int_{0}^{1} f(x)\sin\pi nxdx$. Ясно, что система $\{g_n\}_{n\in N}$ является биортогональной системой к системе $\{\sin\pi nt\}_{n\in N}$. Учитывая равенство $c_{-n} = -c_n$, $n \in N$, и $c_0 = 0$ для $\forall m \in N$ получим

$$\sum_{n=-m}^{m} c_n e^{i\pi nt} = \sum_{n=1}^{m} c_n e^{i\pi nt} - \sum_{n=1}^{m} c_n e^{-i\pi nt} = \sum_{n=1}^{m} c_n (e^{i\pi nt} - e^{-i\pi nt}) =$$

$$= 2i\sum_{n=1}^{m} c_n \sin\pi nt = \sum_{n=1}^{m} < f, g_n > \sin\pi nt.$$

Легко показать, что $F(t) - \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{\mathrm{int}}$ является нечетным продолжением $f(t) - \sum_{n=1}^{m} < f, g_n > \sin\pi nt$ на $[-1,1]$. Поэтому при $m \to \infty$ получаем

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{m} < f, g_n > \sin\pi nt \right\|_{L_{p),\rho}(0,1)} = \left\| F - \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{i\pi nt} \right\|_{L_{p),\rho}(-1,1)} \to 0,$$

т. е. система $\{\sin\pi nt\}_{n\in N}$ образует базис в пространстве $G_{p),\rho}(0,1)$.

Аналогичным образом доказывается базисность системы косинусов $\{\cos\pi nt\}_{n\in Z_+}$ в пространстве $G_{p),\rho}(0,1)$. Теорема доказана.

5.4. Базисные свойства системы собственных функций одной разрывной спектральной задачи для дифференциального уравнения второго порядка в пространстве гранд Лебега

Рассмотрим следующую разрывную спектральную задачу вида

$$y^{//}(x)+\lambda y(x)=0,\ x\in(-1,0)\cup(0,1), \tag{5.4.1}$$

$$\left.\begin{aligned} & y(-1)=y(1)=0, \\ & y(-0)=y(+0), \\ & y^{/}(-0)-y^{/}(+0)=\lambda m y(0), m\neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.4.2}$$

Известно ([141], стр. 103) что задача (5.4.1), (5.4.2) имеет следующие две серии собственных значений

$$\lambda_{1,n}=(\pi n)^2,\ n=1,2,...,$$

$$\lambda_{2,n}=\rho_{2,n}^2,\ n=0,1,2,...,$$

где $\rho_{2,n}$ имеет асимптотику $\rho_{2,n}=\pi n+\dfrac{2}{\pi m n}+O(\dfrac{1}{n^2})$, соответствующие собственные функции, которых имеют вид

$$u_{2n-1}(x)=\sin\pi n x,\ n=1,2,...,$$

$$u_{2n}(x)=\begin{cases}\sin\rho_{2,n}(1+x), x\in[-1,0]\\ \sin\rho_{2,n}(1-x), x\in[0,1]\end{cases},\ n=0,1,2,....$$

В работе [141] доказывается, что система векторов ([141], Теорема 1)

$$\hat{u}_{2n-1}(x)=(u_{2n-1}(x);0),\ n=1,2,...,$$

$$\hat{u}_{2n}(x)=(u_{2n}(x);m\sin\rho_{2,n}),\ n=0,1,2,....$$

образует базис в пространстве $L_p(-1,1)\oplus C$, $1<p<+\infty$, а при $p=2$ этот базис является базисом Рисса.

Обозначим через $GW^2_{p)}(-1,1)$, $1<p<+\infty$, подпространство пространства гранд Соболева $W^2_{p)}(-1,1)$, состоящее из функций $f\in W^2_{p)}(-1,1)$, для которых $f^{//}\in G_{p)}(-1,1)$. Пусть

$$GW^2_{p)}((-1,0)\cup(0,1))=GW^2_{p)}(-1,0)\oplus GW^2_{p)}(0,1).$$

Имеет место следующая

Лемма 5.4.1. *Дельта функционал Дирака* $\delta_x(u)=u(x)$, $x\in(-1,1)$ *является линейным ограниченным в* $GW^2_{p)}(-1,1)$ *и неограниченным в* $G_{p)}(-1,1)$, $1<p<+\infty$.

Доказательство. Фиксируя точку $x\in(-1,1)$ для $\forall t\in(-1,1)$ получим

$$|\delta_x(u)|=|u(x)|=\left|u(t)+\int_t^x u'(s)ds\right|\le|u(t)|+\int_t^x|u'(s)|ds.$$

Интегрируя обе части последнего неравенства по переменной t вдоль отрезка $[-1,1]$ получим

$$2|\delta_x(u)|\le\int_{-1}^1|u(t)|dt+\int_{-1}^1\left(\int_t^x|u'(s)|ds\right)dt\le\int_{-1}^1|u(t)|dt+2\int_{-1}^1|u'(t)|dt.$$

Отсюда для $\forall\varepsilon\in(0,p-1)$, используя неравенство Гельдера с показателем $p-\varepsilon$, получим

$$|\delta_x(u)|\le 2^{-\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\int_{-1}^1|u(t)|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}+2^{1-\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\int_{-1}^1|u'(t)|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\le$$

$$\le\varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}}(\|u\|_{p)}+2\|u'\|_{p)})\le 2\varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}}(\|u\|_{p)}+\|u'\|_{p)})=$$

$$\le 2\varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}}(\|u\|_{p)}+\|u'\|_{p)}+\|u''\|_{p)})=2\varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}}\|u\|_{GW^2_{p)}},$$

т. е. функционал δ_x является линейным ограниченным в $GW^2_{p)}(-1,1)$.

Теперь установим неограниченность функционала δ_x в $G_{p)}(-1,1)$. Предположим противное, т. е. пусть δ_x ограничен в $G_{p)}(-1,1)$. Тогда существует число $M>0$ такое, что

$$|\delta_x(u)|\le M\|u\|_{p)},\ \forall u\in G_{p)}(-1,1). \tag{5.4.3}$$

Легко показать, что $\forall u\in L_p(-1,1)$ имеет место соотношение

$$\|u\|_{p)}\le 2^{-\frac{1}{p}}(p-1)\|u\|_p. \tag{5.4.4}$$

Тогда из (5.4.3) и (5.4.4) получим

$$|\delta_x(u)|\le 2^{-\frac{1}{p}}(p-1)M\|u\|_p,\ \forall u\in L_p(-1,1).$$

А это противоречит неограниченности функционала δ_x в $L_p(-1,1)$. Таким образом, функционал δ_x неограничен в $G_{p)}(-1,1)$. Лемма доказана.

Рассмотрим в $G_{p)}(-1,1)\oplus C$ оператор A, определенный выражением

$$A(\hat{u}) = (-u^{//}; u^{/}(-0) - u^{/}(+0))$$

с областью определения

$$D(A) = \{\hat{u} = (u;\alpha) : u \in GW^2_{p)}((-1,0)\cup(0,1))\}.$$

Покажем, что A является замкнутым оператором. Пусть $\hat{u}_n = (u_n;\alpha_n) \in D(A)$ произвольная последовательность такая, что

$$\|\hat{u}_n - \hat{u}\|_{G_{p)}\oplus C} \to 0,$$

$$\|A\hat{u}_n - \hat{v}\|_{G_{p)}\oplus C} \to 0 \; n \to \infty.$$

где $\hat{u}=(u;\alpha)$ и $\hat{v}=(v;\beta)$ соответственно. Тогда ясно, что последовательность u_n сходится в $G_{p)}(-1,1)$ к u, а последовательность $u_n^{//}$ сходятся в $G_{p)}(-1,1)$ к $-v$. Следовательно, последовательности u_n и $u_n^{//}$ сходятся, соответственно, к u и $-v$ в пространстве $L_1(-1,1)$. Так как u_n и $u_n^{/}$ абсолютно непрерывны на $[-1,0]$, то существует $u^{/}$ и функции u и $u^{/}$ абсолютно непрерывны на $[-1,0]$. Более того последовательность $u_n^{//}$ сходится в $L_1(-1,0)$ к $u^{//}$. Значит $u^{//}(x) = -v(x)$, почти всюду на $[-1,0]$, и поэтому $u^{//}\in G_{p)}(-1,0)$, т. е. $u \in GW^2_{p)}(-1,0)$. Аналогично показывается, что $u \in GW^2_{p)}(0,1)$. Из выше полученных следует, что $\hat{u}\in D(A)$. С другой стороны, имеет место равенство $\beta = u^{/}(-0) - u^{/}(+0)$. Таким образом $A(\hat{u}) = \hat{v}$, т. е. A замкнут в $G_{p)}(-1,1)\oplus C$. Определим оператор L в $G_{p)}(-1,1)\oplus C$ по формуле

$$L(\hat{u}) = (-u^{//}; u^{/}(-0) - u^{/}(+0)) \tag{5.4.5}$$

с областью определения

$$D(L) = \{\hat{u} = (u; mu(0)) : u \in GW^2_{p)}((-1,0)\cup(0,1)), u(-1) = u(1) = 0, u(-0) = u(+0)\}. \tag{5.4.6}$$

Покажем, что оператор L является замкнутым, плотно заданным оператором. Для $\forall \hat{u} = (u;\alpha) \in G_{p)}(-1,1)\oplus C$ положим

$$F(\hat{u}) = mu(0) - \alpha\,,$$

$$U_1(\hat{u}) = U_1(u) = u(-1)\,,$$

$$U_2(\hat{u}) = U_2(u) = u(1)\,,$$

$$U_3(\hat{u}) = U_3(u) = u(-0) - u(+0)\,.$$

Область $D(L)$ можно записать в виде

$$D(L) = \left\{\hat{u} \in G_{p)} \oplus C : \hat{u} = (u,\alpha) \in GW^2_{p)}((-1,0) \cup (0,1)), F(u) = 0, U_i(u) = 0, i = \overline{1,3}\right\}.$$

В силу Леммы 5.4.1 линейные функционалы F и U_i, $i = 1,2,3$, ограничены в $GW^2_{p)}(-1,1) \oplus C$, но неограниченны в $G_{p)}(-1,1) \oplus C$. Тогда в силу замкнутости оператора A ([54], стр. 27) его сужение L на $D(L)$ является замкнутым и плотно заданным в $G_{p)}(-1,1) \oplus C$. Таким образом, доказана следующая

Теорема 5.4.1. *Пусть оператор* L *определен по формуле (5.4.5) с областью определения* $D(L)$*, заданная соотношением (5.4.6). Тогда оператор* L *является замкнутым, плотно заданным оператором в пространстве* $G_{p)}(-1,1) \oplus C$, $1 < p < +\infty$.

Как известно ([141], стр. 103) собственные значения оператора L совпадают с собственными значениями задачи (5.4.1), (5.4.2), а соответствующими собственными векторами являются

$$\hat{u}_{2n-1}(x) = (u_{2n-1}(x);0)\,,\ n \in N$$

$$\hat{u}_{2n}(x) = (u_{2n}(x); m\sin\rho_{2,n})\,,\ n \in Z_+\,.$$

Докажем следующую основную теорему о базисности системы $\{\hat{u}_n\}_{n\in Z_+}$ в пространстве $G_{p)}(-1,1) \oplus C$.

Теорема 5.4.2. *Система собственных векторов* $\{\hat{u}_n\}_{n\in Z_+}$ *оператора* L *образует базис в пространстве* $G_{p)}(-1,1) \oplus C$, $1 < p < +\infty$.

Доказательство. Для доказательства проверим условия критерия базисности систем. Сначала докажем полноту системы $\{\hat{u}_n\}_{n\in Z_+}$. Возьмем произвольный вектор $\hat{u} \in G_{p)}(-1,1) \oplus C$ и произвольное число $\eta > 0$. Из Теоремы

5.1.2. следует, что пространство $L_p(-1,1)\oplus C$ плотно в $G_{p)}(-1,1)\oplus C$. Следовательно, существует вектор $\hat{v}\in L_p(-1,1)\oplus C$ такой, что

$$\|\hat{u}-\hat{v}\|_{G_{p)}\oplus C}<\eta . \tag{5.4.7}$$

Из полноты системы $\{\hat{u}_n\}_{n\in Z_+}$ в $L_p(-1,1)\oplus C$ ([146], Теорема 1), существует вектор $\hat{w}\in L(\{\hat{u}_n\}_{n\in Z_+})$ такой, что

$$\|\hat{v}-\hat{w}\|_{L_p\oplus C}<\eta . \tag{5.4.8}$$

Из (5.4.4) и (5.4.8) получим

$$\|\hat{v}-\hat{w}\|_{G_{p)}\oplus C}\le 2^{-\frac{1}{p}}(p-1)\|\hat{v}-\hat{w}\|_{L_p\oplus C}<2^{-\frac{1}{p}}(p-1)\eta . \tag{5.4.9}$$

Тогда применяя неравенство треугольника с учетом (5.4.7) и (5.4.9), получим

$$\|\hat{u}-\hat{w}\|_{G_{p)}\oplus C}\le\|\hat{u}-\hat{v}\|_{G_{p)}\oplus C}+\|\hat{v}-\hat{w}\|_{G_{p)}\oplus C}\le\eta+2^{1-\frac{1}{p}}(p-1)\eta=M\eta .$$

т. е. система $\{\hat{u}_n\}_{n\in Z_+}$ полна в $G_{p)}(-1,1)\oplus C$.

Установим минимальность системы $\{\hat{u}_n\}_{n\in Z_+}$ в $G_{p)}(-1,1)\oplus C$. Как показано в [141] система $\{\hat{u}_n\}_{n\in Z_+}$ имеет ([141, стр. 112) биортогонально сопряженную в $L_p(-1,1)\oplus C$ систему векторов $\{\hat{v}_n\}_{n\in Z_+}$: $\hat{v}_n(x)=(v_n(x);mv(0))$, где функции $v_n(x)$, $n\in Z_+$ являются собственными функциями соответствующей сопряженной спектральной задачи

$$v^{//}(x)+\lambda v(x)=0,\ x\in(-1,0)\cup(0,1),$$

$$v(-1)=v(1)=0,$$

$$v(-0)=v(+0),$$

$$v^{/}(-0)-v^{/}(+0)=\lambda\overline{m}v(0)$$

и имеют вид

$$v_{2n-1}(x)=\sin\pi nx,\ n\in N,$$

$$v_{2n}(x)=\begin{cases}c_{2n}\sin\overline{\rho}_{2,n}(1+x), x\in[-1,0]\\ c_{2n}\sin\overline{\rho}_{2,n}(1-x), x\in[0,1]\end{cases},\ n\in Z_+, \tag{5.4.10}$$

для нормирующих чисел c_{2n} которых справедливы соотношения

$$c_{2n} = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \qquad (5.4.11)$$

Кроме того, существует постоянная $a > 0$ не зависящая от p и $n \in Z_+$, такая, что имеет место $|< \hat{u}, \hat{v}_n >| \le a\|\hat{u}\|_{L_p \oplus C}$. Докажем, что $\{\hat{v}_n\}_{n \in Z_+}$ является биортогональной системой к системе $\{\hat{u}_n\}_{n \in Z_+}$ в $G_{p)}(-1,1) \oplus C$, определенная по формуле

$$< \hat{u}, \hat{v}_n > = \int_{-1}^{1} u(x)\overline{v_n}(x)dx + \alpha m v_n(0), \ \hat{u} = (u; \alpha).$$

В самом деле, для любого фиксированного $\varepsilon \in (0, p-1)$ имеем

$$|< \hat{u}, \hat{v}_n >| \le a\|\hat{u}\|_{L_{p-\varepsilon} \oplus C} \le a_1\|\hat{u}\|_{G_{p)} \oplus C}. \qquad (5.4.12)$$

Таким образом, система $\{\hat{u}_n\}_{n \in Z_+}$ минимальна в $G_{p)}(-1,1) \oplus C$.

Остается показать равномерную ограниченность в $G_{p)}(-1,1) \oplus C$ последовательности проекторов

$$S_n(\hat{f}) = \sum_{k=0}^{n} < \hat{f}, \hat{v}_n > \hat{u}_n, \ \hat{f} \in G_{p)}(-1,1) \oplus C.$$

Для фиксированного $\hat{f} \in G_{p)}(-1,1) \oplus C$, $\hat{f} = (f; \beta)$, рассмотрим уравнение

$$L\hat{u} - \lambda\hat{u} = \hat{f}. \qquad (5.4.13)$$

Уравнение (5.4.13) можно написать в виде следующей задачи

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x) + f(x) \\ u'(-0) - u'(+0) - \lambda m u(0) = \beta \\ U_i(u) = 0, i = 1,2,3 \end{cases}. \qquad (5.4.14)$$

Как известно ([141]), Лемма 4) задача (5.4.14) имеет решение

$$u(x,\rho) = \frac{\beta \sin\rho(1+x)}{\rho(2\cos\rho - \rho m \sin\rho)} - \frac{1}{\rho}\int_{-1}^{x} f(\xi)\sin\rho(x-\xi)d\xi +$$

$$+\frac{1}{\rho}\int_{x}^{0} f(\xi)\sin\rho(x-\xi)d\xi + \frac{1}{\Delta(\rho)}\int_{-1}^{0} f(\xi)\sin\rho(1+x)\sin\rho(1+\xi)d\xi -$$

$$-\frac{1}{\rho\sin\rho}\int_{-1}^{x} f(\xi)\sin\rho(1+x)\sin\rho\xi d\xi - \frac{1}{\rho\sin\rho}\int_{x}^{0} f(\xi)\sin\rho x \sin\rho(1+\xi)d\xi +$$

$$+\frac{1}{\Delta(\rho)}\int_0^1 f(\xi)\sin\rho(1+x)\sin\rho(1-\xi)d\xi\,,\ x\in[-1,0]; \tag{5.4.15}$$

$$u(x,\rho)=\frac{\beta\sin\rho(1-x)}{\rho(2\cos\rho-\rho m\sin\rho)}-\frac{1}{\rho}\int_0^x f(\xi)\sin\rho(x-\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{\rho}\int_x^1 f(\xi)\sin\rho(x-\xi)d\xi+\frac{1}{\Delta(\rho)}\int_0^1 f(\xi)\sin\rho(1-x)\sin\rho(1-\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{\rho\sin\rho}\int_0^x f(\xi)\sin\rho x\sin\rho(1-\xi)d\xi+\frac{1}{\rho\sin\rho}\int_x^1 f(\xi)\sin\rho(1-x)\sin\rho\xi d\xi+$$

$$+\frac{1}{\Delta(\rho)}\int_{-1}^0 f(\xi)\sin\rho(1-x)\sin\rho(1+\xi)d\xi\,,\ x\in[0,1], \tag{5.4.16}$$

где $\Delta(\rho)=-\rho\sin\rho(\rho m\sin\rho-2\cos\rho)$ и $\lambda=\rho^2$ принадлежит резольвентному множеству оператора L. Следовательно

$$u(0,\rho)=\frac{1}{\rho(2\cos\rho-\rho m\sin\rho)}\times$$

$$\times\left[\beta\sin\rho+\int_{-1}^0 f(\xi)\sin\rho(1+\xi)d\xi+\int_0^1 f(\xi)\sin\rho(1-\xi)d\xi\right]. \tag{5.4.17}$$

Положим

$$\Gamma_{2n-1}=\left\{\rho:\left|\rho-\rho_{1,n}\right|=\frac{1}{2\pi mn}\right\},\ n\in N,$$

$$\Gamma_{2n}=\left\{\rho:\left|\rho-\rho_{2,n}\right|=\frac{1}{2\pi mn}\right\},\ n\in Z_+;$$

$$C_n=\left\{\rho:\left|\rho\right|=\pi(n+\frac{1}{2}),0\le\arg\rho\le\pi\right\},\ n\in Z_+$$

и пусть Γ'_{2n-1}, Γ'_{2n} и C'_n их соответствующие образы при отображении $\lambda=\rho^2$. Тогда посредством резольвенты $R(\lambda)$ оператора L оператор S_n записывается в виде

$$S_n(\hat f)=\sum_{k=0}^{n}E_k(\hat f),$$

где последовательность проекторов $\{E_n\}_{n\in Z_+}$ выражается по формулам

$$E_{2n-1}\hat f=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'_{2n-1}}R(\lambda)\,\hat f d\lambda=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_{2n-1}}\rho R(\rho^2)\,\hat f d\rho\,,\ n\in N;$$

$$E_{2n}\hat{f}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'_{2n}}R(\lambda)\,\hat{f}d\lambda=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_{2n}}\rho R(\rho^2)\,\hat{f}d\rho,\ n\in Z_+ .$$

Учитывая $R(\rho^2)\,\hat{f}=\hat{u}(x,\rho)=(u(x,\rho);mu(0,\rho))$, получим

$$S_{2n-1}\hat{f}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'_n}R(\lambda)\,\hat{f}(x)d\lambda=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{C_n}\rho R(\rho^2)\,\hat{f}(x)d\rho=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{C'_n}\rho\hat{u}(x,\rho)d\rho=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\left(\int\limits_{C_n}\rho u(x,\rho)d\rho;\int\limits_{C_n}m\rho u(0,\rho)d\rho\right)=\frac{1}{\pi i}(J_n(x),mJ_n(0)),\ n\in Z_+ .$$

Известно, что

$$|\sin\rho|\le M_0e^{|\rho|\sin\varphi},\quad \rho=|\rho|\sin\varphi,\ 0\le\varphi\le\pi ,$$

кроме того, для достаточно большого $|\rho|$ вне окружностей некоторого радиуса δ с центрами в нулях $\Delta_1(\rho)=2\cos\rho-m\rho\sin\rho$ имеет место неравенство

$$|\Delta_1(\rho)|\ge M_1|\rho|e^{|\rho|\sin\varphi}.$$

Из этих неравенств следует, что при $0\le\varphi\le\pi$, с достаточно большим $|\rho|$ вне окружностей некоторого радиуса δ с центрами в нулях $\Delta_1(\rho)$ имеет место соотношение

$$\left|\frac{\sin\rho(1+x)}{\Delta_1(\rho)}\right|\le\frac{M_0e^{|\rho|x\sin\varphi}}{M_1|\rho|}\le\frac{M_2}{|\rho|},\ \forall x\in[-1,0]. \tag{5.4.18}$$

Согласно равенству (5.4.15) имеем

$$J_n(0)=\beta\int\limits_{C_n}\frac{\sin\rho}{\rho\Delta_1(\rho)}d\rho+\int\limits_{C_n}\left(\int\limits_{-1}^{0}f(\xi)\frac{\sin\rho(1+\xi)}{\rho\Delta_1(\rho)}d\xi\right)d\rho+\int\limits_{C_n}\left(\int\limits_{0}^{1}f(\xi)\frac{\sin\rho(1-\xi)}{\rho\Delta_1(\rho)}d\xi\right)d\rho=$$

$$=\beta\int\limits_{C_n}\frac{\sin\rho}{\rho\Delta_1(\rho)}d\rho+\int\limits_{C_n}\left(\int\limits_{-1}^{0}f(\xi)\frac{\sin\rho(1+\xi)}{\rho\Delta_1(\rho)}d\xi\right)d\rho+\int\limits_{C_n}\left(\int\limits_{-1}^{0}f(-\xi)\frac{\sin\rho(1+\xi)}{\rho\Delta_1(\rho)}d\xi\right)d\rho .$$

Отсюда используя (5.4.18) и неравенство Гельдера с показателем $p-\varepsilon$, $\varepsilon\in(0,p-1)$, получим

$$|J_n(0)|\le|\beta|\int\limits_{C_n}\left|\frac{\sin\rho}{\rho\Delta_1(\rho)}\right||d\rho|+\int\limits_{C_n}\left(\int\limits_{-1}^{0}|f(\xi)|\left|\frac{\sin\rho(1+\xi)}{\rho\Delta_1(\rho)}\right|d\xi\right)|d\rho|+$$

$$+\int\limits_{C_n}\left(\int\limits_{-1}^{0}|f(-\xi)|\left|\frac{\sin\rho(1+\xi)}{\rho\Delta_1(\rho)}\right|d\xi\right)|d\rho|\le$$

$$\leq M_2 \int_{C_n} \frac{1}{|\rho|} |d\rho| \left(|\beta| + \int_{-1}^{0} |f(\xi)| d\xi + \int_{0}^{1} |f(\xi)| d\xi \right) \leq$$

$$\leq \pi M_2 \left(|\beta| + \left(\int_{-1}^{0} |f(\xi)|^{p-\varepsilon} d\xi \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} + \left(\int_{0}^{1} |f(\xi)|^{p-\varepsilon} d\xi \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \right) \leq$$

$$\leq 2\pi M_2 \left(|\beta| + \|f\|_{L_{p-\varepsilon}(-1,1)} \right) \leq 2\pi M_2 \left(|\beta| + \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{G_{p)}(-1,1)} \right) \leq$$

$$\leq M_3 \left(|\beta| + \|f\|_{G_{p)}(-1,1)} \right). \tag{5.4.19}$$

Положим $J_n(x) = \sum_{i=1}^{7} J_{n,i}(x)$. Имеем

$$|J_{n,1}(x)| \leq |\beta| C_\delta \int_{C_n} \frac{e^{|\rho| x \sin\varphi}}{|\rho|} |d\rho| = |\beta| C_\delta \int_{0}^{\pi} e^{\pi(n+\frac{1}{2}) x \sin\varphi} d\varphi \leq |\beta| C_\delta .$$

Далее, так как подынтегральные функции в $J_{n,2}(x)$ и $J_{n,3}(x)$ являются аналитичными по λ, имеет место $J_{n,2}(x) = J_{n,3}(x) = 0$. Из результатов ([141], стр. 111) следует, что согласно (5.4.19), существует не зависящая от f и p постоянная $M_4 > 0$ такая, что для достаточно больших n имеет место

$$|J_{n,4}(x)| \leq M_4 \int_{-1}^{0} \frac{|f(\xi)|}{-x-\xi} d\xi = M_4 H(g)(-x), \quad \forall x \in [-1,0], \tag{5.4.20}$$

где $g(x) = |f(-x)|$. Аналогичные оценки верны и для $J_{n,i}(x)$, $i = 5,6,7$. Так как преобразование Гильберта H является ограниченным в пространстве $L_{p)}(0,1)$ (см. [183], стр. 749), существует положительная постоянная $M_5 > 0$ такая, что

$$\|H(g)\|_{G_{p)}(0,1)} \leq M_5 \|g\|_{G_{p)}(0,1)} = M_5 \|f\|_{G_{p)}(-1,0)} . \tag{5.4.21}$$

Таким образом, из (5.4.20) и (5.4.21) получаем

$$\|J_n\|_{G_{p)}(-1,0)} \leq M_4 \|H(g)\|_{G_{p)}(0,1)} \leq M_6 \|f\|_{G_{p)}(-1,0)} , \tag{5.4.22}$$

где $M_6 = M_4 M_5$. Производя аналогичные рассуждения над равенством (3.12), можно показать, что существует не зависящая от f и p постоянная $M_7 > 0$ такая, что

$$\|J_n\|_{G_{p)}(0,1)} \le M_7 \|f\|_{G_{p)}(0,1)}. \qquad (5.4.23)$$

Тогда, учитывая (5.4.22) и (5.4.23), получим

$$\|J_n\|_{G_{p)}(-1,1)} \le \|J_n\|_{G_{p)}(-1,0)} + \|J_n\|_{G_{p)}(0,1)} \le$$

$$\le M_6 \|f\|_{G_{p)}(-1,0)} + M_7 \|f\|_{G_{p)}(0,1)} \le M_8 \|f\|_{G_{p)}(-1,1)}, \qquad (5.4.24)$$

где $M_8 = M_6 + M_7$.

Теперь оценим норму $\left\|S_{2n-1}(\hat{f})\right\|_{G_{p)}\oplus C}$. Используя соотношения (5.4.19) и (5.4.24), получим

$$\left\|S_{2n-1}(\hat{f})\right\|_{G_{p)}(-1,1)\oplus C} = \frac{1}{\pi}\left(\|J_n\|_{G_{p)}(-1,1)} + |mJ_n(0)|\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\left(M_8 \|f\|_{G_{p)}(-1,1)} + |m| M_3 \left(|\beta| + \|f\|_{G_{p)}(-1,1)}\right)\right) \le M \left\|\hat{f}\right\|_{G_{p)}\oplus C}. \qquad (5.4.25)$$

Остается оценить $\left\|S_{2n}(\hat{f})\right\|_{G_{p)}\oplus C}$. Запишем $S_{2n}\hat{f}$ в виде

$$S_{2n}\hat{f} = S_{2n-1}\hat{f} + <\hat{f}, \hat{v}_{2n}> \hat{u}_{2n}.$$

Ясно, что $a_0 = \sup\limits_n \|\hat{u}_n\|_{G_{p)}(-1,1)\oplus C} < +\infty$. Следовательно, используя (5.4.12) и (5.4.25) в силу неравенства треугольника получим

$$\left\|S_{2n}(\hat{f})\right\|_{G_{p)}(-1,1)\oplus C} \le \left\|S_{2n-1}(\hat{f})\right\|_{G_{p)}(-1,1)\oplus C} + \left|<\hat{f}, v_n>\right| \|\hat{u}_{2n}\|_{G_{p)}(-1,1)\oplus C} \le$$

$$\le (M + a_0 a_1)\left\|\hat{f}\right\|_{G_{p)}(-1,1)\oplus C} = K \left\|\hat{f}\right\|_{G_{p)}(-1,1)\oplus C}. \qquad (5.4.26)$$

Из (5.4.25) и (5.4.26) следует, что последовательность $\{S_n\}_{n\in Z_+}$ равномерно ограничена. Таким образом, система $\{\hat{u}_n\}_{n\in Z_+}$ образует базис в $G_{p)}(-1,1)\oplus C$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что система $\{u_n\}_{n\in Z_+}$ собственных векторов задачи (5.4.1), (5.4.2) полна в пространстве $G_{p)}(-1,1)$, $1 < p < +\infty$. Действительно, в противном случае существует отличный от нуля линейный непрерывный в $G_{p)}(-1,1)$ функционал v такой, что $<u_n, v> = 0$, $\forall n \in Z_+$. Обозначим через $\hat{v}$ функционал в $G_{p)}(-1,1)\oplus C$ заданный по формуле $<\hat{u}, \hat{v}> = <u, v>$. Ясно, что $\hat{v}$

является ненулевым линейным непрерывным функционалом в $G_{p)}(-1,1)\oplus C$ и $<\hat{u}_n,\hat{v}>=0$, $\forall n\in Z_+$. Это противоречит полноте системы $\{\hat{u}_n\}_{n\in Z_+}$ в $G_{p)}(-1,1)\oplus C$.

В следующей теореме изучается базисность системы $\{u_n\}_{n\in Z_+}$ в $G_{p)}(-1,1)$.

Теорема 5.4.3. *Для любого* $k_0\in Z_+$ *система* $\{u_n\}_{n\in Z_+,n\neq 2k_0}$ *образует базис в* $G_{p)}(-1,1)$, $1<p<+\infty$.

Доказательство. Возьмем произвольный $f\in G_{p)}(-1,1)$. Из (5.4.17) следует, что для системы $\{v_n\}_{n\in Z_+}$ биортогональной к $\{u_n\}_{n\in Z_+}$ имеет место

$$v_{2n}(0)=c_{2n}\sin\bar{\rho}_{2,n}\neq 0,\ n\in Z_+.$$

Разложив вектор

$$\hat{f}=(f;\beta),\quad \beta=-\frac{<f,v_{2k_0}>}{m\overline{v_{2k_0}(0)}},$$

по базису $\{\hat{u}_n\}_{n\in Z_+}$ получим

$$\hat{f}=\sum_{n=0}^{+\infty}<\hat{f},\hat{v}_n>\hat{u}_n=\sum_{n=0}^{+\infty}(<f,v_n>+\beta m\overline{v_n(0)})\hat{u}_n=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(<f,v_n>-\frac{<f,v_{2k_0}>}{m\overline{v_{2k_0}(0)}}m\overline{v_n(0)})\hat{u}_n=\sum_{n=0,n\neq 2k_0}^{+\infty}(<f,v_n>-\frac{<f,v_{2k_0}>}{\overline{v_{2k_0}(0)}}\overline{v_n(0)})\hat{u}_n=$$

$$=\sum_{n=0,n\neq 2k_0}^{+\infty}(<f,v_n-\frac{v_n(0)}{v_{2k_0}(0)}v_{2k_0}>\hat{u}_n.$$

Отсюда следует

$$f=\sum_{n=0,n\neq 2k_0}^{+\infty}<f,v_n-\frac{v_n(0)}{v_{2k_0}(0)}v_{2k_0}>u_n=\sum_{n=0,n\neq 2k_0}^{+\infty}<f,v_n^*>u_n, \tag{5.4.27}$$

где $v_n^*=v_n-\dfrac{v_n(0)}{v_{2k_0}(0)}v_{2k_0}$, $n\neq 2k_0$. С другой стороны, системы $\{v_n^*\}_{n\in Z_+,n\neq 2k_0}$ и $\{u_n\}_{n\in Z_+,n\neq 2k_0}$ биортогональны. На самом деле,

$$<u_k,v_n^*>=<u_k,v_n>-\frac{\overline{v_n(0)}}{v_{2k_0}(0)}<u_k,v_{2k_0}>=<u_k,v_n>=\delta_{nk},\ n,k\in Z_+\setminus\{2k_0\}.$$

Значит, $f\in G_{p)}(-1,1)$ имеет однозначное разложение (5.4.27) по системе $\{u_n\}_{n\in Z_+,n\neq 2k_0}$. Следовательно, система $\{u_n\}_{n\in Z_+,n\neq 2k_0}$ образует базис в $G_{p)}(-1,1)$. Теорема доказана.

5.5. Базисность собственных функции разрывного дифференциального оператора одной спектральной задачи в весовых пространствах гранд Лебега

Рассмотрим спектральную задачу вида

$$y''(x)+\lambda y(x)=0\,,\ x\in(0,\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3},1)\,, \tag{5.5.1}$$

$$\left.\begin{aligned} & y(0)=y(1)=0, \\ & y(\frac{1}{3}-0)=y(\frac{1}{3}+0), \\ & y'(\frac{1}{3}-0)-y'(\frac{1}{3}+0)=\lambda m y(\frac{1}{3}), \end{aligned}\right\}, \tag{5.5.2}$$

где λ - спектральный параметр, m - ненулевое комплексное число.

Известно ([139], стр. 2) что задача (5.5.1), (5.5.2) имеет две серии собственных значений $\lambda_{1,n}=(\rho_{1,n})^2$, $n\in N$, и $\lambda_{2,n}=(\rho_{2,n})^2$, $n\in N\cup\{0\}$, где

$$\rho_{1,n}=3\pi n\,,\ \rho_{2,n}=\frac{3\pi n}{2}+\frac{2+(-1)^n}{\pi m n}+O(\frac{1}{n^2})\,,$$

соответствующие собственные функции выражаются в виде

$$y_{1,n}(x)=\sin 3\pi n x\,,\ x\in[0,1],\ n\in N\ ,$$

$$y_{2,n}(x)=\begin{cases}\sin\rho_{2,n}(x-\frac{1}{3})+\sin\rho_{2,n}(x+\frac{1}{3}), x\in[0,\frac{1}{3}] \\ \sin\rho_{2,n}(1-x), x\in[\frac{1}{3},1]\end{cases},\ n\in N\cup\{0\}. \tag{5.5.3}$$

Пусть

$$GW_{p)}^2((0,\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3},1))=GW_{p)}^2(0,\frac{1}{3})\oplus GW_{p)}^2(\frac{1}{3},1)\,.$$

Рассмотрим в пространстве $G_{p)}(0,1)\oplus C$ оператор L по формуле

$$L(\hat{y})=(-y'';y'(\frac{1}{3}-0)-y'(\frac{1}{3}+0))\,, \tag{5.5.4}$$

область определения $D_{p)}(L)$ которого состоит из

$$\hat{y}=\left(y;my(\frac{1}{3})\right)\in GW_{p)}^2((0,\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3},1))\oplus C$$

удовлетворяющее условиям

$$y(0)=y(1)=0,\ y(\frac{1}{3}-0)=y(\frac{1}{3}+0).$$

Из результатов ([139], стр. 3) следует, что оператор L, определенный по равенству (5.5.4) с областью определения $D_p(L)$ состоящее из $\hat{y}=\left(y; my(\frac{1}{3})\right)$ таких, что

$$y\in W_p^2((0,\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3},1)),$$

$$y(0)=y(1)=0,\ y(\frac{1}{3}-0)=y(\frac{1}{3}+0),$$

является замкнутым плотно заданным оператором в пространстве $L_p(0,1)\oplus C$, с компактной резольвентой. Более, того собственные значения оператора L и задачи (5.5.1), (5.5.2) совпадают, а система $\{\hat{y}_n\}_{n\in N}$ собственных функций оператора L выражается системой собственных функций $\{y_n\}_{n\in Z_+}$ задачи (5.5.1), (5.5.2) в виде

$$\hat{y}_n=\left(y_n; my_n(\frac{1}{3})\right). \tag{5.5.5}$$

Эти факты имеют место и для оператора L, с областью определения $D_{p)}(L)$ в пространстве $G_{p)}(0,1)\oplus C$. Имеет место следующая

Теорема 5.5.1. *Пусть в* $G_{p)}(0,1)\oplus C$, $1<p<+\infty$, *оператор* L *определен по формуле (5.5.4) с областью определения* $D_{p)}(L)$. *Тогда оператор* L *является замкнутым плотно заданным оператором в пространстве* $G_{p)}(-1,1)\oplus C$, *с компактной резольвентой. Собственные значения оператора* L *и задачи (5.5.1), (5.5.2) совпадают, а соответствующими собственными векторами являются*

$$\hat{y}_{1,n}(x)=(y_{1,n}(x); my_{1,n}(\frac{1}{3})),\ n\in N$$

$$\hat{y}_{2,n}(x)=(y_{2,2n}(x); my_{2,2n}(\frac{1}{3})),\ n\in Z_+, \tag{5.5.6}$$

$$\hat{y}_{3,n}(x) = (y_{2,2n-1}(x); m y_{2,2n-1}(\frac{1}{3})),\ n \in N,$$

где системы $\{y_{1,n}\}_{n\in N}$ *и* $\{y_{2,n}\}_{n\in Z_+}$ *выражаются по формулам (5.5.3).*

Доказательство. Очевидно, что имеет место непрерывное вложение

$$D_p(L) \subset D_{p)}(L) \subset D_{p-\varepsilon}(L),\ \varepsilon \in (0, p-1).$$

Возьмем произвольные $\hat{y} \in G_{p)}(0,1) \oplus C$ и положительное число $\delta > 0$. В силу плотности $L_p(0,1) \oplus C$ в $G_{p)}(0,1) \oplus C$ существует $\hat{u} \in L_p(0,1) \oplus C$ такое, что

$$\|\hat{y} - \hat{u}\|_{L_{p)}(0,1)\oplus C} < \delta. \tag{5.5.7}$$

Так как $D_p(L)$ плотно в $L_p(0,1) \oplus C$, то существует $\hat{v} \in D_p(L)$ такое, что

$$\|\hat{u} - \hat{v}\|_{L_p(0,1)\oplus C} < \delta.$$

Из (5.5.4) следует, что существует число $c > 0$ такое, что

$$\|\hat{u} - \hat{v}\|_{L_{p)}(0,1)\oplus C} \le c\|\hat{u} - \hat{v}\|_{L_p(0,1)\oplus C} < c\delta. \tag{5.5.8}$$

Следовательно, из (5.5.7) и (5.5.8) получаем

$$\|\hat{y} - \hat{v}\|_{L_{p)}(0,1)\oplus C} \le \|\hat{y} - \hat{u}\|_{L_{p)}(0,1)\oplus C} + \|\hat{u} - \hat{v}\|_{L_{p)}(0,1)\oplus C} < \delta + c\delta = (1+c)\delta.$$

Отсюда, учитывая $D_p(L) \subset D_{p)}(L)$, следует, что $\hat{y} \in \overline{D_{p)}(L)}$.

Установим замкнутость оператора L в $G_{p)}(0,1) \oplus C$. Пусть последовательности $\hat{x}_n \in D_{p)}(L)$ и $L(\hat{x}_n) = \hat{z}_n$ сходится в $G_{p)}(0,1) \oplus C$ к $\hat{x} \in G_{p)}(0,1) \oplus C$ и $\hat{z} \in G_{p)}(0,1) \oplus C$ соответственно. Пусть $\varepsilon \in (0, p-1)$ - фиксированное число. Тогда из $\hat{x}_n \in D_{p-\varepsilon}(L)$ и непрерывности $D_{p)}(L) \subset D_{p-\varepsilon}(L)$ получаем, что $\hat{x}_n$ сходится к $\hat{x}$ в $L_{p-\varepsilon}(0,1) \oplus C$. В силу замкнутости оператора L в $L_{p-\varepsilon}(0,1) \oplus C$ получаем, что $\hat{x} \in D_{p-\varepsilon}(L)$ и $L(\hat{x}) = \hat{z}$. Из $\hat{z} \in G_{p)}(0,1) \oplus C$ и $L(\hat{x}) = \hat{z}$ следует, что $x^{//} \in G_{p)}(0,1)$, и поэтому $\hat{x} \in D_{p)}(L)$, т.е. L является замкнутым в $G_{p)}(0,1) \oplus C$. Остальная часть доказательства очевидна. Теорема доказана.

Как известно ([139], стр.7), система собственных векторов оператора L с областью определения $D_p(L)$ образует базис в пространстве $L_p(0,1) \oplus C$ и ее биортогонально сопряженная система имеет вид

$$\hat{z}_n = (z_n; \overline{m} z_n(\frac{1}{3})), \qquad (5.5.9)$$

где $\{z_n\}_{n\in Z_+}$ - система собственных функций соответствующей сопряженной спектральной задачи

$$z^{//}(x) + \lambda z(x) = 0, \ x \in (0, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, 1),$$

$$z(0) = z(1) = 0,$$

$$z(\frac{1}{3} - 0) = z(\frac{1}{3} + 0),$$

$$z^{/}(\frac{1}{3} - 0) - z^{/}(\frac{1}{3} + 0) = \lambda \overline{m} z(\frac{1}{3})$$

Система $\{z_n\}_{n\in Z_+}$ определяется по формулам

$$z_{1,n}(x) = 2\sin 3\pi n x, \ x \in [0,1], \ n \in N, \qquad (5.5.10)$$

$$z_{2,n}(x) = \begin{cases} c_{2,n}\left(\sin\frac{3\pi n}{2}(x - \frac{1}{3}) + \sin\frac{3\pi n}{2}(x + \frac{1}{3})\right) + O\left(\frac{1}{n}\right), x \in [0, \frac{1}{3}] \\ c_{2,n}\sin\frac{3\pi n}{2}(1 - x) + O\left(\frac{1}{n}\right), x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}, \ n \in Z_+, \qquad (5.5.11)$$

где $c_{2,n}$ являются нормализирующими числами, для которых справедливы асимптотические соотношения

$$c_{2,n} = \frac{2 + (-1)^n}{3} + O\left(\frac{1}{n}\right), \ n \in Z_+.$$

Докажем, что аналогичный факт имеет место для оператора L с областью определения $D_{p)}(L)$ в пространстве $G_{p),\rho}(0,1) \oplus C$.

Теорема 5.5.2. *Пусть весовая функция ρ принадлежит классу $A_p(0,1)$. Тогда система $\{\hat{y}_n\}_{n\in Z_+}$ собственных векторов оператора L образует базис в пространстве $G_{p),\rho}(0,1) \oplus C$, $1 < p < +\infty$.*

Доказательство. Из Теоремы 5.5.1 следует, что система $\{\hat{y}_n\}_{n\in Z_+}$ собственных векторов оператора L определяется по формулам (5.5.6). Не сложно показать, что система $\{\hat{z}_n\}_{n\in Z_+}$ является также биортогональной системой для $\{\hat{y}_n\}_{n\in Z_+}$ в $G_{p)}(0,1) \oplus C$. Рассмотрим следующую систему функций

$$u_{1,n}(x)=\sin 3\pi nx\,,\ \ x\in[0,1]\,,\ \ n\in N\,,$$

$$u_{2,n}(x)=\begin{cases}2(-1)^n\sin 3\pi nx, & x\in[0,\frac{1}{3}]\\ \sin 3\pi nx, & x\in[\frac{1}{3},1]\end{cases},\ \ n\in N\,, \tag{5.5.12}$$

$$u_{3,n}(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,\frac{1}{3}]\\ -\cos 3\pi(n-\frac{1}{2})x, & x\in[\frac{1}{3},1]\end{cases},\ \ n\in N\,.$$

Сравнивая формулы (5.5.3) и (5.5.12) получим

$$y_{1,n}(x)=u_{1,n}(x)+O\left(\frac{1}{n}\right),\ \ n\in N\,,$$

$$y_{2,2n}(x)=u_{2,n}(x)+O\left(\frac{1}{n}\right),\ \ n\in N\,, \tag{5.5.13}$$

$$y_{2,2n-1}(x)=u_{3,n}(x)+O\left(\frac{1}{n}\right),\ \ n\in N\,,$$

Положим

$$e_{1,n}(x)=\begin{cases}\sin 3\pi nx, & x\in[0,\frac{1}{3}]\\ 0, & x\in[\frac{1}{3},1]\end{cases},$$

$$e_{2,n}(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,\frac{1}{3}]\\ \sin 3\pi nx, & x\in[\frac{1}{3},1]\end{cases},$$

$$e_{3,n}(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,\frac{1}{3}]\\ -\cos 3\pi(n-\frac{1}{2})x, & x\in[\frac{1}{3},1]\end{cases}.$$

Из Теоремы 5.2.4 непосредственно следует, что система $\{\sin 3\pi nx\}_{n\in N}$ образует базис в $G_{p),\rho}(0,\frac{1}{3})$. Проводя замену переменной в виде $t=\frac{3x-1}{2}$ базисность системы $\left\{\sin 3\pi nx; -\cos 3\pi(n-\frac{1}{2})x\right\}_{n\in N}$ в $G_{p),\rho}(\frac{1}{3},1)$ сводится к базисности системы

$\{\sin\pi nt\}_{n\in N}$ в $G_{p),\rho}(0,1)$. Следовательно, система $\{e_{i,n}\}_{i-\overline{1,3},n\in N}$ образует базис в $G_{p),\rho}(0,1)$. Так как из (5.5.12)

$$u_{i,n}(x)=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}^{(n)}e_{j,n}(x),\ i=1,2,3,\ n\in N \tag{5.5.14}$$

и для матрицы

$$A_n=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2(-1)^n & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

коэффициентов $\det A_n=1-2(-1)^n\neq 0$. Следовательно ([139], стр. 3), система $\{u_{i,n}\}_{i-\overline{1,3},n\in N}$ также образует базис в $G_{p),\rho}(0,1)$. Тогда очевидно, что система $\{\hat u_0\}\cup\{\hat u_{i,n}\}_{i-\overline{1,3},n\in N}$ образует базис в $G_{p),\rho}(0,1)\oplus C$, где

$$\hat u_0(x)=(0;1),\ \hat u_{i,n}(x)=(u_{i,n}(x);0),\ i=\overline{1,3},\ n\in N\ .$$

Далее, возьмем произвольную вектор $\hat f=(f,\alpha)\in L_{p),\rho}(0,1)\oplus C$. В силу Леммы 5.3.1 существует $r\in(1,+\infty)$ и $L_{p),\rho}(0,1)$ непрерывно вложено в $L_r(0,1)$. Тогда из $f\in L_r(0,1)$ согласно неравенству Хаусдорфа-Юнга и непрерывности вложения $L_{p),\rho}(0,1)\subset L_r(0,1)$ имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left|< f,e_{i,n}>\right|^{r'}\right)^{\frac{1}{r'}}\le M\|f\|_{L_{p),\rho}(0,1)}, \tag{5.5.15}$$

где $M>0$ - некоторое число, $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$. Из результатов работы ([139]) следует, что система $\{\hat y_0\}\cup\{\hat y_{i,n}\}_{i-\overline{1,3},n\in N}$ минимальна в $L_p(0,1)\oplus C$ и ее биортогональная система $\{\hat v_0\}\cup\{\hat v_{i,n}\}_{i-\overline{1,3},n\in N}$ имеет вид

$$\hat v_0(x)=(0;1),\ \hat v_{i,n}(x)=(v_{i,n}(x);0),\ i=1,2,3,\ n\in N,$$

где

$$v_{1,n}(x)=\begin{cases}\dfrac{6}{1-2(-1)^n}\sin 3\pi nx, x\in[0,\dfrac{1}{3}],\\ -\dfrac{6(-1)^n}{1-2(-1)^n}\sin 3\pi nx, x\in[\dfrac{1}{3},1],\end{cases}$$

$$v_{2,n}(x)=\begin{cases}-\dfrac{6}{1-2(-1)^n}\sin 3\pi nx, x\in[0,\dfrac{1}{3}],\\ \dfrac{3}{1-2(-1)^n}\sin 3\pi nx, x\in[\dfrac{1}{3},1],\end{cases}$$

$$v_{3,n}(x)=\begin{cases}0, x\in[0,\dfrac{1}{3}],\\ -3\cos 3\pi(n-\dfrac{1}{2})x, x\in[\dfrac{1}{3},1].\end{cases}$$

Учитывая вложение $L_p(0,1)\subset L_{p)}(0,1)\subset L_{p-\varepsilon}(0,1)$, $0<\varepsilon<p-1$, получаем, что система $\{\hat{v}_0\}\cup\{\hat{v}_{i,n}\}_{i-\overline{1,3},n\in N}$ является системой линейных непрерывных функционалов в $L_{p)}(0,1)\oplus C$, т. е. система $\{\hat{y}_0\}\cup\{\hat{y}_{i,n}\}_{i-\overline{1,3},n\in N}$ минимальна в $L_{p)}(0,1)\oplus C$. Несложно показать, что система $\{v_{i,n}\}_{i-\overline{1,3},n\in N}$ преобразуется через систему $\{e_{i,n}\}_{i-\overline{1,3},n\in N}$ в виде

$$v_{i,n}(x)=\sum_{j=1}^{3}b_{ij}^{(n)}e_{j,n}(x),\ i=1,2,3,\ n\in N\ ,$$

где матрица преобразования $B_n=(b_{i,j}^{(n)})=(A_n^{-1})^*$. Тогда

$$\left|<f,v_{i,n}>\right|^{r'}\le\left(\sum_{j=1}^{3}\left|b_{ij}^{(n)}\right|^{r}\right)^{\frac{r'}{r}}\sum_{j=1}^{3}\left|<f,e_{j,n}>\right|^{r'}.$$

Отсюда учитывая (5.5.15) получим

$$\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left|<f,v_{i,n}>\right|^{r'}\right)^{\frac{1}{r'}}\le\sup_n\left(\sum_{j=1}^{3}\left|b_{ij}^{(n)}\right|^{r}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left|<f,e_{j,n}>\right|^{r'}\right)^{\frac{1}{r'}}\le$$

$$\le M_1\sup_n\left(\sum_{j=1}^{3}\left|b_{ij}^{(n)}\right|^{r}\right)^{\frac{1}{r}}\|f\|_{L_{p),\rho}(0,1)}=M_2\|f\|_{L_{p),\rho}(0,1)}. \qquad (5.5.16)$$

Таким образом учитывая (5.5.16) и $<f,v_0>=\alpha$ получим

$$\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left|<f,v_{i,n}>\right|^{r'}+\left|<f,v_0>\right|^{r'}\right)^{\frac{1}{r'}}\le\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left|<f,v_{i,n}>\right|^{r'}\right)^{\frac{1}{r'}}+\left|<f,v_0>\right|\le$$

$$\le M_2\|f\|_{L_{p),\rho}(0,1)}+|\alpha|\le M_2(\|f\|_{L_{p),\rho}(0,1)}+|\alpha|)=M_2\left\|\hat{f}\right\|_{L_{p),\rho}(0,1)\oplus C}.$$

Из этого неравенства следует, что система $\{\hat{u}_0\}\cup\{\hat{u}_{i,n}\}_{i-\overline{1,3},n\in N}$ является r'-базисом в $G_{p),\rho}(0,1)\oplus C$. Положим

$$\hat{y}_0(x)=(y_0(x);1)=(0;1),$$

$$\hat{y}_{1,n}(x)=(y_{1,n}(x);my_{1,n}(\frac{1}{3})),$$

$$\hat{y}_{2,2n}(x)=(y_{2,2n}(x);my_{2,2n}(\frac{1}{3})).$$

Из (5.5.13) следует, что для $\forall r: r>1$ выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\hat{y}_{i,n}-\hat{u}_{i,n}\right\|^{r}_{L_{p),\rho}(0,1)\oplus C}<+\infty,$$

и значит системы $\{\hat{y}_0\}\cup\{\hat{y}_{i,n}\}_{i-\overline{1,3},n\in N}$ и $\{\hat{u}_0\}\cup\{\hat{u}_{i,n}\}_{i-\overline{1,3},n\in N}$ являются r-близкими. Таким образом в силу того, что $\{\hat{u}_0\}\cup\{\hat{u}_{i,n}\}_{i-\overline{1,3},n\in N}$ является r'-базисом в $G_{p),\rho}(0,1)\oplus C$, а система $\{\hat{y}_0\}\cup\{\hat{y}_{i,n}\}_{i-\overline{1,3},n\in N}$ r-близка к $\{\hat{u}_0\}\cup\{\hat{u}_{i,n}\}_{i-\overline{1,3},n\in N}$, то из минимальности системы $\{\hat{y}_0\}\cup\{\hat{y}_{i,n}\}_{i-\overline{1,3},n\in N}$ она образует базис в $G_{p),\rho}(0,1)\oplus C$ изоморфный к $\{\hat{u}_0\}\cup\{\hat{u}_{i,n}\}_{i-\overline{1,3},n\in N}$. Теорема доказана.

В следующей теореме изучаются базисные свойства в пространствах $G_{p),\rho}(0,1)$, $1<p<+\infty$, системы собственных векторов $\{y_0\}\cup\{y_{i,n}\}_{i-1,2,n\in N}$ задачи (5.5.1), (5.5.2).

Теорема 5.5.3. *Пусть весовая функция ρ принадлежит классу $A_p(0,1)$, $1<p<+\infty$. Справедливы следующие утверждения:*

1) если из системы $\{y_0\}\cup\{y_{i,n}\}_{i=1,2,n\in N}$ исключить произвольную функцию $y_{2,n_0}(x)$, соответствующее простому собственному значению, то полученная система образует базис в пространстве $G_{p),\rho}(0,1)$;

2) если из системы $\{y_0\}\cup\{y_{i,n}\}_{i=1,2,n\in N}$ исключить произвольную функцию $y_{1,n_0}(x)$, то полученная система не является базисом в $G_{p),\rho}(0,1)$. При этом эта система не полна и не минимальна в $G_{p),\rho}(0,1)$.

Доказательство. По Теореме 5.5.2 система $\{\hat{y}_0\}\cup\{\hat{y}_{i,n}\}_{i=1,2,n\in N}$,

$$\hat{y}_0(x) = (0;1),$$

$$\hat{y}_{i,n}(x) = (y_{i,n}(x); m y_{i,n}(\frac{1}{3})),\ n = 1,2,$$

образует базис в $G_{p),\rho}(0,1) \oplus C$ и имеет биортогональную систему $\{\hat{z}_0\} \cup \{\hat{z}_{i,n}\}_{i-\overline{1,3}, n\in N}$, заданная по формулам (5.5.10) и (5.5.11). Пусть $y_{2,n_0}(x)$ произвольная собственная функция задачи (5.5.1), (5.5.2), соответствующая простому собственному значению. Так как для системы $\{y_0\} \cup \{y_{i,n}\}_{i-1,2,n\in N}$ без $y_{2,n_0}(x)$ имеет место $\delta = \overline{m} z_{2,n_0}(\frac{1}{3}) \neq 0$, то в силу Теоремы 2.3 ([139], стр. 5) она образует базис в $G_{p),\rho}(0,1)$, т. е. имеет место предположение 1).

Далее, возьмем произвольную функцию $y_{1,n_0}(x)$ и рассмотрим вопрос базисности системы $\{y_0\} \cup \{y_{i,n}\}_{i-1,2,n\in N}$ с выброшенной функцией $y_{1,n_0}(x)$. Для этой системы имеем $\delta = \overline{m} z_{1,n_0}(\frac{1}{3}) = 0$. Тогда, по Теореме 2.3 ([139], стр. 5) полученная система не полна и не минимальна в $G_{p),\rho}(0,1)$. Теорема доказана.

5.6. Аналоги теорем Коровкина и их статистические варианты в пространствах гранд Лебега

Следующая теорема является аналогом теорем Коровкина ([81]) в пространствах $G_{p)}(0,1)$.

Теорема 5.6.1. *Пусть* $\{L_n\}_{n\in N}$ *- последовательность положительных линейных ограниченных операторов в* $G_{p)}(0,1)$, $1 < p < +\infty$, *такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n g - g\|_\infty = 0,\ \forall g \in \{1, t, t^2\}.$$

Тогда соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n f - f\|_{p)} = 0,\ \forall f \in G_{p)}(0,1),$$

имеет место в том и только в том случае, когда $\sup_n \|L_n\| = c < +\infty$.

Доказательство. Необходимость теоремы следует из теоремы Банаха-Штейнгауза. Докажем достаточность теоремы. Пусть $\eta > 0$ произвольное число. Возьмем произвольную функцию $f \in G_{p)}(0,1)$. Из Леммы 5.1.2 следует, что существует $g \in C([0,1])$ такая, что

$$\|f - g\|_{p)} < \eta. \tag{5.6.1}$$

В силу Теоремы Коровкина ([81], стр. 98) существует n_η, что для $\forall n > n_\eta$: $\|L_n g - g\|_\infty < \eta$. Тогда, используя

$$\|f\|_{p)} \le (p-1)\|f\|_\infty, \ \forall f \in C([0,1]),$$

получаем

$$\|L_n f - f\|_{p)} \le \|L_n f - L_n g\|_{p)} + \|L_n g - g\|_{p)} + \|f - g\|_{p)}.$$

Отсюда, учитывая (5.6.1) для $\forall n > n_\eta$ получим

$$\|L_n f - f\|_{p)} < c\|f - g\|_{p)} + (p-1)\|L_n g - g\|_\infty + \|f - g\|_{p)} < (c+p)\eta.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}\|L_n f - f\|_{p)} = 0$. Теорема доказана.

Следствие 5.6.1. *Пусть* $\{L_n\}_{n\in N}$ *- последовательность положительных линейных ограниченных операторов в* $G_{p)}(0,1)$, $1 < p < +\infty$, *такая, что* $\sup\limits_n \|L_n\| = c < +\infty$. *Если в* $C([0,1])$

$$\exists st - \lim_{n\to\infty} L_n g = g, \ \forall g \in \{1, t, t^2\}$$

то в $G_{p)}(0,1)$

$$\exists st - \lim_{n\to\infty} L_n f = f, \ \forall f \in G_{p)}(0,1).$$

Доказательство. Из $\exists st - \lim\limits_{n\to\infty} L_n g = g$, $\forall g \in \{1, t, t^2\}$, следует ([98], стр. 41), что $\exists \{n_k\}_{k\in N} \in K \ (n_1 < n_2 < ... < n_k < ...)$:

$$\lim_{k\to\infty}\|L_{n_k} g - g\|_\infty = 0, \ \forall g \in \{1, t, t^2\}.$$

Тогда, в силу Теоремы 5.6.1, имеем

$$\lim_{k\to\infty}\|L_{n_k} f - f\|_{p)} = 0, \ \forall f \in G_{p)}(0,1).$$

Отсюда как известно ([98], стр. 40), получаем, что для $\forall f \in G_{p)}(0,1)$ последовательность $\{L_n f\}_{n\in N}$ статистически сходится к f в $G_{p)}(0,1)$. Следствие доказано.

Применим доказанную теорему для последовательности операторов, порожденных полиномами Канторовича

$$K_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}\left((n+1)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\ 0\le x\le 1,\ \forall f\in L_p(0,1)\ . \qquad (5.6.2)$$

Теорема 5.6.2. *Пусть* $\{K_n\}_{n\in N}$ *- последовательность положительных линейных операторов, определенных по формуле (5.6.2). Тогда имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\|K_n f - f\|_{p)}=0,\ \forall f\in G_{p)}(0,1),\ 1<p<+\infty .$$

Доказательство. Известно ([81], стр. 102), что K_n положительный линейный оператор, ограниченно действующий в $L_p(0,1)$ и $\|K_n\|\le 1$, $\forall n\in N$. Для $\forall f\in G_{p)}(0,1)$ имеем

$$\|K_n f\|_{p)}=\sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\varepsilon\int_0^1 |(K_n f)(t)|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}=\sup_{0<\varepsilon<p-1}\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\|K_n f\|_{p-\varepsilon}\le\|f\|_{p)},$$

т. е. $\{K_n\}_{n\in N}$ равномерно ограничена в $G_{p)}(0,1)$. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\|K_n g - g\|_{\infty}=0,\ \forall g\in\{1,t,t^2\},$$

то из Теоремы 5.6.1 следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\|K_n f - f\|_{p)}=0,\ \forall f\in G_{p)}(0,1).$$

Теорема доказана.

Следствие 5.6.2. *Пусть* $\{K_n\}_{n\in N}$ *- последовательность положительных линейных операторов, определенных по формуле (5.6.2). Тогда в* $G_{p)}(0,1)$

$$\exists st-\lim_{n\to\infty}K_n f = f,\ \forall f\in G_{p)}(0,1).$$

Аналогично доказывается следующий аналог второй теоремы Коровкина в пространстве $G_{p)}(0,1)$.

Теорема 5.6.3. *Пусть* $\{L_n\}_{n\in N}$ *- последовательность положительных линейных ограниченных операторов в* $G_{p)}(-\pi,\pi)$, $1<p<+\infty$, *такая, что*

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n g-g\|_\infty=0,\ \forall g\in\{1,\sin,\cos\}.$$

Тогда соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n f-f\|_{p)}=0,\ \forall f\in G^{p)}(-\pi,\pi),$$

имеет место в том и только в том случае, когда $\sup_n\|L_n\|=c<+\infty$.

Следствие 5.6.3. *Пусть* $\{L_n\}_{n\in N}$ *- последовательность положительных линейных ограниченных операторов в* $G_{p)}(-\pi,\pi)$*, такая, что* $L_n:C_{2\pi}(R)\to C_{2\pi}(R)$ *и* $\sup_n\|L_n\|=c<+\infty$. *Если в* $C_{2\pi}(R)$

$$\exists st-\lim_{n\to\infty}L_n g=g,\ \forall g\in\{1,\sin,\cos\},$$

то в $G_{p)}(-\pi,\pi)$

$$\exists st-\lim_{n\to\infty}L_n f=f,\ \forall f\in G_{p)}(-\pi,\pi).$$

Последовательность $\{\varphi_n\}_{n\in N}\subset L^1_{2\pi}(R)$ называется положительным периодическим ядром, если почти всюду $\varphi_n\ge 0$, $\forall n\in N$, и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(t)dt=1. \qquad (5.6.3)$$

Каждое положительное периодическое ядро $\{\varphi_n\}_{n\in N}\subset L^1_{2\pi}(R)$ порождает последовательность линейных операторов $\{L_n\}_{n\in N}$ в $L^1_{2\pi}(R)$ по формуле

$$L_n(f)(x)=(f*\varphi_n)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\varphi_n(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\varphi_n(x-t)dt. \qquad (5.6.4)$$

Из неравенства Гельдера следует, что если $f\in L^p_{2\pi}(R)$, $1<p<+\infty$, то $L_n(f)\in L^p_{2\pi}(R)$. Более того имеют места неравенства

$$\|L_n(f)\|_p\le\|\varphi_n\|_1\|f\|_p,\ f\in C_{2\pi}(R),\quad 1<p\le+\infty. \qquad (5.6.5)$$

Положительное периодическое ядро $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ называется тождественно аппроксимативным, если $\forall\delta\in(0,\pi)$ имеет место $\lim_{n\to\infty}\left[\int_{-\pi}^{-\delta}\varphi_n(t)dt+\int_{\delta}^{\pi}\varphi_n(t)dt\right]=0$.

Теорема 5.6.4. *Пусть* $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset L^1_{2\pi}(R)$ *- положительное периодическое ядро и* $\{L_n\}_{n\in N}$ *- последовательность операторов, определенных по формуле (5.6.4), а последовательность чисел* $\{\beta_n\}_{n\in N}$ *задана по формуле*

$$\beta_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(t)\sin^2\frac{t}{2}\,dt\,.$$

Тогда следующие свойства эквивалентны:

$i)$ *Для любого* $1 < p < +\infty$ *и имеет место*

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n f - f\|_{p)} = 0\,, \forall f \in G_{p)}(-\pi,\pi)\ ,$$

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n f - f\|_{\infty} = 0\,, \forall f \in C_{2\pi}(R)\,; \tag{5.6.6}$$

$ii)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = 0$;

$iii)$ $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ *- тождественно аппроксимативно.*

Доказательство. Очевидно, что для доказательства теоремы достаточно показать справедливость эквивалентности $i) \Leftrightarrow ii)$. Пусть выполнено условие $i)$. Так как положительное ядро $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ ограничено, то согласно (5.6.5) существует число $c > 0$ такое, что $\|L_n\| \le c$, $\forall n \in N$. Поэтому в силу плотности $C_{2\pi}(R)$ в $L^p_{2\pi}(R)$ и равенства (5.6.6) получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\|L_n f - f\|_p = 0\,, \forall f \in L^p_{2\pi}(R)$. Следовательно, по Теореме 4.4 ([81], стр. 108) имеет место $ii)$.

Обратно, пусть выполнено условие $ii)$. По Теореме 4.4 ([81], стр. 108) имеют место равенства

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n f - f\|_p = 0\,, \quad \forall f \in L^p_{2\pi}(R)\,,$$

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n f - f\|_{\infty} = 0\,, \forall f \in C_{2\pi}(R)\,.$$

Учитывая (5.6.5), для $\forall f \in G_{p)}(-\pi,\pi)$ получим

$$\|L_n(f)\|_{p)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\|L_n(f)\|_{p-\varepsilon} \le \|\varphi_n\|_1 \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\|f\|_{p-\varepsilon} = \|\varphi_n\|_1\|f\|_{p)}\,.$$

Возьмем $\forall f \in G_{p)}(-\pi,\pi)$ и $\forall \eta > 0$. В силу плотности $C_{2\pi}(R)$ в $G_{p)}(-\pi,\pi)$ существует $g \in C_{2\pi}(R)$ такой, что

$$\|f-g\|_{p)} < \eta . \tag{5.6.7}$$

Из условия теоремы следует, что существует n_η такой, что для $\forall n > n_\eta$:

$$\|L_n g - g\|_\infty < \eta . \tag{5.6.8}$$

Ясно, что $\sup\limits_n \|\varphi_n\|_1 = c < +\infty$. Тогда учитывая (5.6.7) и (5.6.8), получим

$$\|L_n f - f\|_{p)} \le \|L_n f - L_n g\|_{p)} + \|L_n g - g\|_{p)} + \|f-g\|_{p)} <$$

$$< (c+1)\eta + (p-1)\eta = (c+p)\eta \ ,$$

т. е. верно (5.6.6). Таким образом, имеет место условие $i)$. Теорема доказана.

ГЛАВА VI.
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ РИМАНА В КЛАССАХ ГРАНД ХАРДИ. ПРИЛОЖЕНИЯ К ВОПРОСАМ БАЗИСОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ГРАНД ЛЕБЕГА

Изучение многих задач теории уравнений в частных производных, математической физики и механики методом Фурье сводится к изучению базисных свойств системы собственных и присоединенных элементов соответствующих дифференциальных операторов в различных функциональных пространствах. В большинстве случаях в главных частях асимптотических их формул находятся собственные и присоединенные элементы модельных дифференциальных операторов. Зная свойства этих систем с помощью теорем об устойчивости базисных свойств в банаховых пространствах, можно изучить базисные свойства системы собственных и присоединенных элементов рассматриваемых операторов. Поэтому изучение базисных свойств возмущенных систем экспонент в различных пространствах представляет особый научный интерес. Отметим, что критерий базисности системы $\left\{e^{i(n+\alpha sign n)t}\right\}$ в случае $\alpha \in R$ изучался в работе А.М.Седлетцкого [67], а для тригонометрических систем синусов и косинусов, связанных с этой системой в работе Е.И.Моисеева [58, 59]. Случай $\alpha \in C$ был рассмотрен в работах Г.Г.Девдариани [24]. Базисные свойства классической системы экспонент с вырождающимися коэффициентами изучались в работах К.И.Бабенко [4], В.Ф.Гапошкина [19], А.Н.Барменкова [6], А.Н.Барменкова, Ю.А.Казьмина [7], Ю.И.Любарского [52], Ю.И.Любарского, В.А.Ткаченко [53], Б.Т.Билалова [9-13] и др. Во многих из этих работ вопрос полноты и минимальности систем сводится к разрешимости в классах Харди различных краевых задач Римана на границе соответствующей области. Этот метод был успешно применен С.М.Пономаревым [65] и Е.И.Моисеевым [58, 59] при установлении базисных свойств тригонометрических систем с линейной фазой в лебеговых пространствах функций. Дальнейшее развитие этого метода при изучении базисных свойств специальных систем функций принадлежит Б.Т.Билалову [9-13]. Отметим, что краевые задачи в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости изучены в работе B.T.Bilalov, Z.G.Guseynov [89], а в пространствах Морри в работе Б.Т.Билалова [12]. Задача Римана в подпространствах гранд Лебега функций представимых по формуле Коши была изучена в работе V.M.Kokilashvili, A.Meskhi, V.Paatashvili [182]. Установление базисности возмущенной системы экспонент в пространствах гранд Лебега методом краевых задач для аналитических функций требует определения классов гранд Харди и изучения в этих классах задач Римана. В этой главе определяются классы гранд Харди и для функций этих классов доказываются аналоги классических теорем. Найдены общие решения задач Римана в классах гранд Харди и устанавливается базисность возмущенной системы экспонент в подпространствах гранд Лебега, порождённых оператором сдвига.

6.1. Классы гранд Харди и некоторые их свойства

Пусть $\{t_k\}\subset[-\pi,\pi]$, $t_k \neq t_j$, $k \neq j$, $k=\overline{1,m}$, и рассмотрим следующую весовую функцию

$$\nu(t)=\prod_{k=1}^{m}\left|t-t_k\right|^{\beta_k},\ \beta_k \in R.$$

Найдем условие, гарантирующее включение $\nu(t)\in L_{p)}(-\pi,\pi)$.

Справедлива следующая

Лемма 6.1.1. Включение $\nu(t)\in L_{p)}(-\pi,\pi)$ *верно в том и только в том случае, когда выполнены условия* $\beta_k \in [-\frac{1}{p},+\infty)$, $k=\overline{1,m}$.

Доказательство. Очевидно, что лемму достаточно доказать для случая функции $\nu(t)=|t-t_0|^{\beta}$, $t_0\in[-\pi,\pi]$, $\beta\in R$. Для простоты доказательства положим $t_0=0$, т. е. $\nu(t)=|t|^{\beta}$. Сперва рассмотрим случай, когда $\beta<-\frac{1}{p}$. Тогда

$\exists\varepsilon_0 \in (0, p-1)$: $\beta < -\dfrac{1}{p-\varepsilon_0}$. Поэтому $v(t) \notin L_{p-\varepsilon_0}(-\pi,\pi)$. Получили противоречие к предположению $v(t) \in L_{p)}(-\pi,\pi)$.

Наоборот, пусть $\beta \ge -\dfrac{1}{p}$. Тогда $\forall\varepsilon \in (0, p-1)$ имеем $\beta > -\dfrac{1}{p-\varepsilon}$. Следовательно

$$\|v\|_{p)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\pi t^{\beta(p-\varepsilon)}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \pi^\beta \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{\beta(p-\varepsilon)+1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < +\infty\,.$$

т. е. $v(t) \in L_{p)}(-\pi,\pi)$. Лемма доказана.

В случае ассоциированного пространства справедлива

Лемма 6.1.2. *Включение* $v(t) \in \left(L_{p)}(-\pi,\pi)\right)'$ *имеет место в том и только в том случае, когда выполнены условия* $\beta_k \in (-\dfrac{1}{q}, +\infty)$, $k = \overline{1,m}$, *где* $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

Доказательство. Ясно, что доказательство теоремы достаточно провести для функции $g(t) = |t|^\beta$. Пусть $|t|^\beta \in \left(L_{p)}(-\pi,\pi)\right)'$. Рассмотрим случай, когда $\beta \le -\dfrac{1}{q}$. Возьмем функцию $f(t) = |t|^{-1-\beta}$. По Лемме 6.1.1 имеем $f(t) \in L_{p)}(-\pi,\pi)$. Так как $f(t)g(t) = |t|^{-1}$, то $fg \notin L_1(-\pi,\pi)$. Это противоречит тому, что $|t|^\beta \in \left(L_{p)}(-\pi,\pi)\right)'$.

Наоборот, пусть $\beta > -\dfrac{1}{q}$, что равносильно неравенству $\beta > -1+\dfrac{1}{p}$. Тогда $\exists\varepsilon_0 \in (0, p-1)$: $\beta > -1+\dfrac{1}{p-\varepsilon_0}$. Для $\forall f \in S_{p)}$ имеем

$$\|fg\|_{L_1} = \int_{-\pi}^{\pi}|f(t)g(t)|dt \le \left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^{p-\varepsilon_0}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|^{(p-\varepsilon_0)'}dt\right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon_0)'}} \le$$

$$\le \left(\frac{\varepsilon_0}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{p-\varepsilon_0}}\left(\frac{\varepsilon_0}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^{p-\varepsilon_0}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|^{(p-\varepsilon_0)'}dt\right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon_0)'}} \le$$

$$\le \left(\frac{\varepsilon_0}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{p-\varepsilon_0}}\|f\|_{p)}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|^{(p-\varepsilon_0)'}dt\right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon_0)'}} = a_p\left\||t|^\beta\right\|_{L^{(p-\varepsilon_0)'}}.$$

Таким образом $\|g\|_{p)'} = \sup_{f\in S_{p)}} \|fg\|_{L_1} < +\infty$, т. е. $|t|^{\beta} \in \left(L_{p)}(-\pi,\pi)\right)'$. Лемма доказана.

Следствие 6.1.1. *Пусть* $-\pi = s_0 < s_1 < s_2 < ..... < s_r < \pi$ *- произвольные точки,*

$$\mu(t) = \prod_{k=0}^{r} \left|\sin\frac{t-s_k}{2}\right|^{\alpha_k}, \ \alpha_k \in R.$$

Включение $\mu(t) \in \left(L_{p)}(-\pi,\pi)\right)'$ *имеет место в том и только в том случае, когда выполнены условия* $\alpha_k \in (-\frac{1}{q}, +\infty)$, $k = \overline{0,r}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Доказательство. Имеем

$$\left|\sin\frac{t-s_k}{2}\right|^{\alpha_k} \sim |t-s_k|^{\alpha_k}, \ k = \overline{1,r}, \ \ t \in [-\pi,\pi].$$

Ясно, что включение $\prod_{k=1}^{r} \left|\sin\frac{t-s_k}{2}\right|^{\alpha_k} \in \left(L_{p)}(-\pi,\pi)\right)'$ равносильно включению $\prod_{k=1}^{r} |t-s_k|^{\alpha_k} \in \left(L_{p)}(-\pi,\pi)\right)'$. А это в свою очередь по Лемме 6.1.2 выполняется в том и только в том случае, когда $\alpha_k \in (-\frac{1}{q}, +\infty)$, $k = \overline{1,r}$. Рассмотрим включение $\left|\sin\frac{t+\pi}{2}\right|^{\alpha_0} \in \left(L_{p)}(-\pi,\pi)\right)'$. Очевидно, что

$$\left|\sin\frac{t+\pi}{2}\right|^{\alpha_0} \sim |t+\pi|^{\alpha_0} |t-\pi|^{\alpha_0}, \ t \in [-\pi,\pi].$$

В результате включение $\left|\sin\frac{t+\pi}{2}\right|^{\alpha_0} \in \left(L_{p)}(-\pi,\pi)\right)'$ верно в том и только в том случае, когда $\alpha_0 \in (-\frac{1}{q}, +\infty)$. Следствие доказано.

Пусть $\gamma = \{z \in C : |z| = 1\}$ - единичная окружность, H_p^+, $p > 0$, - класс Харди аналитических в $\omega = \operatorname{int}\gamma$ функций f, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^p dt < +\infty. \qquad (6.1.1)$$

Всякая функция $f \in H_p^+$ имеет почти всюду на γ определенные предельные значения по некасательным путям. Эту предельную функцию обозначим через

f^+. Из леммы Фату следует, что $f^+ \in L_p(0,2\pi)$. Известно, что для всякой функции $f \in H_1^+$ имеет место формула Пуассона

$$f(re^{it}) = \int_0^{2\pi} f^+(e^{is})P(r,s-t)ds\,, \tag{6.1.2}$$

где $P(r,t)$ - ядро Пуассона. Сначала рассмотрим вопрос представления гармонической в ω функции формулой Пуассона при $f \in L_{p)}(0,2\pi)$. Обозначим через $h_{p)}$, $p>1$, класс гармонических в ω функций $u(r,\theta)$ удовлетворяющих условию

$$\|u\|_{h_{p)}} = \sup_{0<r<1}\|u_r(\cdot)\|_{p)} < +\infty\,,$$

где $u_r(t) = u(re^{it})$. При $\forall\varepsilon \in (0,p-1)$ имеют место вложения $h_p \subset h_{p)} \subset h_{p-\varepsilon}$, $p>1$.

Справедлив следующий аналог теоремы Рисса.

Теорема 6.1.1. *Для того, чтобы гармоническая в* ω *функция* $u(r,\theta)$ *была представлена интегралом Пуассона с* $f \in L_{p)}(0,2\pi)$, $p>1$, *необходимо и достаточно, чтобы* $u \in h_{p)}$. *При этом*

$$\|f(\cdot)\|_{h_{p)}} = \lim_{r\to 1}\|u_r(\cdot)\|_{p)}, \quad u \in h_{p)}\,. \tag{6.1.3}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть для гармонической в ω функции $u(r,\theta)$ имеет место представление (6.1.2) с $f \in L_{p)}(0,2\pi)$. Ясно, что $\forall\varepsilon \in (0,p-1)$ имеем $f \in L_{p-\varepsilon}(0,2\pi)$ и в результате справедливо

$$\int_0^{2\pi}|u_r(t)|^{p-\varepsilon}dt = \int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)P(r,s-t)ds\right|^{p-\varepsilon}dt \le$$

$$\le \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{p-\varepsilon}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}|f(s)|P(r,s-t)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}P(r,s-t)^{\frac{p-\varepsilon-1}{p-\varepsilon}}ds\right)^{p-\varepsilon}dt \le$$

$$\le \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{p-\varepsilon}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}|f(s)|^{p-\varepsilon}P(r,s-t)ds\left(\int_0^{2\pi}P(r,s-t)ds\right)^{p-\varepsilon-1}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(s)|^{p-\varepsilon}P(r,s-t)dsdt = \int_0^{2\pi}|f(s)|^{p-\varepsilon}ds\,.$$

Отсюда следует $\|u_r(\cdot)\|_{p)} \le \|f(\cdot)\|_{p)}$, $0<r<1$. Переходя здесь к пределу при $r\to 1$ получим

$$\overline{\lim_{r\to1}}\|u_r(\cdot)\|_{p)} \le \|f(\cdot)\|_{h_{p)}}. \tag{6.1.4}$$

Достаточность. Пусть $u \in h_{p)}$. Для $\forall\varepsilon \in (0, p-1)$ имеем $u \in h_{p-\varepsilon}$. Тогда ясно, что функция $u(r,\theta)$ имеет представление (6.1.2), где $f(t) = u^+(t) \in L_{p-\varepsilon}(0,2\pi)$ - предельные значения $u(r,\theta)$ при $r \to 1$ по некасательным путям. Из леммы Фату следует, что справедливо соотношение

$$\int_0^{2\pi} |u^+(t)|^{p-\varepsilon} dt \le \underline{\lim}_{r\to1} \int_0^{2\pi} |u_r(t)|^{p-\varepsilon} dt.$$

Имеем

$$\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u^+(t)|^{p-\varepsilon} dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \le \underline{\lim}_{r\to1}\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u_r(t)|^{p-\varepsilon} dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \le \underline{\lim}_{r\to1}\|u_r(\cdot)\|_{p)}.$$

В результате получаем

$$\|u^+(\cdot)\|_{p)} \le \underline{\lim}_{r\to1}\|u_r(\cdot)\|_{p)}. \tag{6.1.5}$$

Из (6.1.4) и (6.1.5) следует (6.1.1). Теорема доказана.

Определим пространство гранд Харди $H^+_{p)}$, $p > 1$, аналитических в ω функций f, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{H^+_{p)}} = \sup_{0<r<1}\|f_r(\cdot)\|_{p)} < +\infty,\ f_r(t) = f(re^{it}).$$

Следующая теорема показывает, что норму в классе гранд Харди можно определить через нормы граничной функции. А именно имеет место первая часть Теоремы Рисса ([23], стр. 80).

Теорема 6.1.2. *Всякая функция* $f \in H^+_{p)}$, $p > 1$, *имеет почти всюду на* γ *граничные значения* $f^+(\cdot)$ *по некасательным путям,* $f^+ \in L_{p)}(0,2\pi)$ *и имеет место*

$$\|f^+(\cdot)\|_{p)} = \lim_{r\to1}\|f_r(\cdot)\|_{p)}. \tag{6.1.6}$$

Доказательство. Возьмем $\forall\varepsilon \in (0, p-1)$. Тогда $f \in H^+_{p-\varepsilon}$, при $\varepsilon \in (0, p-1)$. Поэтому, функция f имеет почти всюду на γ граничные значения $f^+(\cdot)$ по некасательным путям, $f^+ \in L_{p-\varepsilon}(0,2\pi)$. По Теореме Рисса имеем

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}\left|f_r(t)\right|^{p-\varepsilon}dt=\int_0^{2\pi}\left|f^+(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\,, \tag{6.1.7}$$

и

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}\left|f_r(t)-f^+(t)\right|^{p-\varepsilon}dt=0\,. \tag{6.1.8}$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f^+(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}=\lim_{r\to 1}\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f_r(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\le$$

$$\le\lim_{r\to 1}\sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f_r(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}=\lim_{r\to 1}\left\|f_r(\cdot)\right\|_{p)}\,.$$

Отсюда непосредственно следует

$$\left\|f^+(\cdot)\right\|_{p)}\le\lim_{r\to 1}\left\|f_r(\cdot)\right\|_{p)}\,. \tag{6.1.9}$$

Установим обратное неравенство. Из неравенства

$$\int_0^{2\pi}\left|f_r(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\le\int_0^{2\pi}\left|f^+(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\,,\ \forall r\in(0,1)\,,$$

следует $\left\|f_r(\cdot)\right\|_{p)}\le\left\|f^+(\cdot)\right\|_{p)}$. Отсюда, переходя к пределу при $r\to 1$, получим

$$\lim_{r\to 1}\left\|f_r(\cdot)\right\|_{p)}\le\left\|f^+(\cdot)\right\|_{p)}\,. \tag{6.1.10}$$

Из соотношений (6.1.9) и (6.1.10) следует (6.1.6). Теорема доказана.

Вторая часть теоремы Рисса имеет место при дополнительном условии.

Теорема 6.1.3. *Пусть* $f\in H^+_{p)}$, $p>1$. *Тогда соотношение*

$$\lim_{r\to 1}\left\|f_r(\cdot)-f^+(\cdot)\right\|_{p)}=0 \tag{6.1.11}$$

выполняется в том и только в том случае, когда имеет место

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\int_0^{2\pi}\left|f^+(t)\right|^{p-\varepsilon}dt=0\,. \tag{6.1.12}$$

Доказательство. Пусть выполнено соотношение (6.1.11). Возьмем произвольные числа $\eta>0$ и $0<\varepsilon<p-1$. Тогда существует $r_0\in(0,1)$ такое, что для $\forall r:\ r_0<r<1$ имеет место

$$\left\| f_r(\cdot) - f^+(\cdot) \right\|_{p)} < \frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}. \tag{6.1.13}$$

Фиксируем r и обозначим через $M(r) = \max\limits_{[0,2\pi]} \left| f_r(t) \right|$. Пусть $0 < \varepsilon_0 < p-1$ такое, что для любого ε: $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ имеет место

$$\varepsilon(2M(r))^{p-\varepsilon} < \frac{\eta}{2\pi}. \tag{6.1.14}$$

Пользуясь неравенством Минковского, с учетом (6.1.13) и (6.1.14) получим

$$\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f^+(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \le \left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f_r(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} + \left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f^+(t) - f_r(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \le$$

$$\le M(r)\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} + \left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f^+(t) - f_r(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \le$$

$$\le M(r)\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} + \left\|f^+(\cdot) - f_r(\cdot)\right\|_{p)} < \frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \left(\frac{\eta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}.$$

Следовательно, для любого ε: $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ имеет место

$$\varepsilon\int_0^{2\pi}\left|f^+(t)\right|^{p-\varepsilon}dt < \eta,$$

т. е. выполняется (6.1.12).

Обратно, пусть имеет место (6.1.12). Возьмем произвольное число $\eta > 0$. Тогда из (6.1.12) непосредственно следует

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f^+(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = 0.$$

Поэтому, существует ε_0: $0 < \varepsilon_0 < p-1$, что для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ имеем

$$\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f^+(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \frac{\eta}{4}. \tag{6.1.15}$$

Из 6.1.8 следует, что

$$\lim_{r\to1}\left(\int_0^{2\pi}\left|f_r(t) - f^+(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = 0.$$

Следовательно, существует $r_0 \in (0,1)$ такое, что для $\forall r$: $r_0 < r < 1$ имеем

$$\left(\int_0^{2\pi}\left|f_r(t)-f^+(t)\right|^{p-\varepsilon_0}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0}} < \frac{\eta}{2e_p}(2\pi)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0}}. \qquad (6.1.16)$$

Таким образом

$$\left\|f_r(\cdot)-f^+(\cdot)\right\|_{p)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f_r(t)-f^+(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \le$$

$$\le \sup_{0<\varepsilon\le\varepsilon_0}\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f_r(t)-f^+(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} + \sup_{\varepsilon_0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f_r(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}. \qquad (6.1.17)$$

Примем следующие обозначения

$$I_1(r,\varepsilon_0) = \sup_{0<\varepsilon\le\varepsilon_0}\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f_r(t)-f^+(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}},$$

$$I_2(r,\varepsilon_0) = \sup_{\varepsilon_0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f_r(t)-f^+(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}.$$

Сперва оценим $I_1(r,\varepsilon_0)$. Используя неравенство Минковского, а также учитывая соотношение $\int_0^{2\pi}\left|f_r(t)\right|^{p-\varepsilon}dt \le \int_0^{2\pi}\left|f^+(t)\right|^{p-\varepsilon}dt$, получим

$$\left(\int_0^{2\pi}\left|f_r(t)-f^+(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \le \left(\int_0^{2\pi}\left|f_r(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} + \left(\int_0^{2\pi}\left|f^+(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \le 2\left(\int_0^{2\pi}\left|f^+(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}.$$

В результате согласно (6.1.16) имеем

$$I_1(r,\varepsilon_0) \le 2\sup_{0<\varepsilon\le\varepsilon_0}\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f^+(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \le \frac{\eta}{2}. \qquad (6.1.18)$$

Оценим $I_2(r,\varepsilon_0)$. Применив неравенство Гельдера с показателем $\dfrac{p-\varepsilon_0}{p-\varepsilon}$ и используя (6.1.21) для любого $\varepsilon:\ \varepsilon>\varepsilon_0$ получим

$$\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f_r(t)-f^+(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \le e_p(2\pi)^{-\frac{1}{p-\varepsilon_0}}\left(\int_0^{2\pi}\left|f_r(t)-f^+(t)\right|^{p-\varepsilon_0}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0}} < \frac{\eta}{2}.$$

Следовательно

$$I_2(r,\varepsilon_0) = \sup_{\varepsilon_0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f_r(t)-f^+(t)\right|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \le \frac{\eta}{2}. \qquad (6.1.19)$$

В результате, из (6.1.17), (6.1.18) и (6.1.19) для $\forall r > r_0$ получаем

$$\left\| f_r(\cdot) - f^+(\cdot) \right\|_{p)} \le I_1(r,\varepsilon_0) + I_2(r,\varepsilon_0) \le \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta\,,$$

т. е. имеет место (6.1.11). Теорема доказана.

Имеет место аналог теоремы Смирнова ([23], стр. 83) в пространствах гранд Харди.

Теорема 6.1.4. *Пусть* $f \in H^+_{p)}$, $p > 1$. *Тогда*

i) если $\left| f^+(e^{it}) \right| \le M$ *почти всюду на* $[-\pi,\pi]$, *то* $\left| f(z) \right| \le M$, $z \in \omega$*;*

ii) если $f^+ \in L_{q)}(-\pi,\pi)$, $p < q$ *, то* $f \in H^+_{q)}$.

Доказательство. Доказательство теоремы непосредственно следует из классической теоремы Смирнова и вложения $H^+_p \subseteq H^+_{p)} \subseteq H^+_{p-\varepsilon}$, $p > 1$, $0 < \varepsilon < p-1$. Теорема доказана.

В следующей теореме устанавливается формула Коши для функций класса гранд Харди.

Теорема 6.1.5.

1) Если $f \in H^+_{p)}$, $1 < p < +\infty$*, то имеет место формула Коши*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f^+(\xi)}{\xi - z} d\xi\,, \; z \in \omega. \tag{6.1.20}$$

2) Если $f^+ \in L_{p)}(0,2\pi)$, $1 < p < +\infty$*, то функция* f *, определенная по формуле (6.1.20), принадлежит классу* $H^+_{p)}$.

Доказательство. Пусть $f \in H^+_{p)}$, $p > 1$. Тогда по Теореме 6.1.2 имеет место $f^+ \in L_{p)}$. Следовательно, $f^+ \in L_{p-\varepsilon}$. Используя Теорему Рисса, получаем формулу Коши (6.1.20) ([8], стр. 174).

Обратно, $f^+ \in L_{p)}(0,2\pi)$. Тогда $f^+ \in L_{p-\varepsilon}$ и по Теореме 6.1.2 имеет место $f \in H^+_{p-\varepsilon}$. Тогда имеем представление (6.1.20). Применив неравенство Гельдера и используя соотношение $\int_0^{2\pi} P_r(s-t)ds = 2\pi$, получим

$$\left|f(re^{it})\right| \le \int_0^{2\pi} \left|f^+(e^{is})\right|^{p-\varepsilon} P^{\frac{1}{p-\varepsilon}}(r,s-t) P^{1-\frac{1}{p-\varepsilon}}(r,s-t)ds \le$$

$$\le \left(\int_0^{2\pi} \left|f^+(e^{is})\right|^{p-\varepsilon} P(r,s-t)ds\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_0^{2\pi} P(r,s-t)ds\right)^{1-\frac{1}{p-\varepsilon}} =$$

$$= (2\pi)^{1-\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_0^{2\pi} \left|f^+(e^{is})\right|^{p-\varepsilon} P(r,s-t)ds\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}.$$

Следовательно

$$\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^{p-\varepsilon} dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \le 2\pi \left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_0^{2\pi} \left|f^+(e^{it})\right|^{p-\varepsilon} dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}.$$

Отсюда непосредственно следует $\left\|f_r(\cdot)\right\|_{p)} \le 2\pi \left\|f^+(\cdot)\right\|_{p)}$ и тем самым справедливо

$$\sup_{0<r<1} \left\|f_r(\cdot)\right\|_{p)} \le 2\pi \left\|f^+(\cdot)\right\|_{p)}.$$

Теорема доказана.

6.2. Разрешимость однородной задачи Римана в классах гранд Харди $H^+_{p)} \times_m H^-_{p)}$

Пусть $\gamma = \{z \in C : |z| = 1\}$ - единичная окружность и $\omega = \operatorname{int}\gamma$. Пусть функция $f(z)$ аналитична вне единичного круга ω и имеет конечный порядок на бесконечно удаленной точке, т. е. Лорановское разложение $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{m} a_k z^k, \ z \to \infty.$$

Если правильная часть $f_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k z^k$ такая, что $\overline{f_0\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \in H^+_{p)}$, $p > 1$, то будем говорить, что f принадлежит классу ${}_mH^-_{p)}$, $p > 1$.

Рассмотрим следующую однородную задачу Римана в классах $H^+_{p)} \times_m H^-_{p)}$:

$$F^+(\tau) - G(\tau)F^-(\tau) = 0, \ \tau \in \gamma, \qquad (6.2.1)$$

где $G(\tau)$ - заданная на γ измеримая функция. Под решением задачи (6.2.1) понимается любая пара функций $F^{+}(z)$ и $F^{-}(z)$, принадлежащих классам $H^{+}_{p)}$, $p>1$, и ${}_{m}H^{-}_{p)}, p>1$, соответственно, граничные значения $F^{\pm}(\tau)$ на единичной окружности γ, которых почти всюду удовлетворяют (6.2.1).

Введем в рассмотрение следующие кусочно-аналитические в $C\setminus\gamma$ функции

$$\mathrm{Z}_1(z)=\exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|G(e^{is})\right|\frac{e^{is}+z}{e^{is}-z}ds\right\},$$

$$\mathrm{Z}_2(z)=\exp\left\{\frac{i}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta(s)\frac{e^{is}+z}{e^{is}-z}ds\right\},\ z\notin\gamma,$$

где $\theta(t)=\arg G(e^{it})$, $t\in[-\pi;\pi]$. Положим

$$\mathrm{Z}_\theta(z)=\mathrm{Z}_1(z)\mathrm{Z}_2(z),\ z\notin\gamma.$$

Совершенно очевидно, что функция $\mathrm{Z}_\theta(z)$ зависит от выбора аргумента $\theta(\cdot)$. Её будем называть каноническим решением однородной задачи (6.2.1).

Граничны значения функций $\mathrm{Z}_i(z)$ на γ выражаются в виде ([12], стр. 271)

$$Z_1^{\pm}(e^{it})=\exp\left\{\pm\frac{1}{2}\ln\left|G(e^{it})\right|+\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|G(e^{is})\right|\frac{e^{is}+e^{it}}{e^{is}-e^{it}}ds\right\},\tag{6.2.2}$$

$$Z_2^{\pm}(e^{it})=\exp\left\{\pm\frac{i}{2}\theta(t)+\frac{i}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta(s)\frac{e^{is}+e^{it}}{e^{is}-e^{it}}ds\right\},\ t\in[-\pi,\pi].\tag{6.2.3}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{Z_1^{+}(e^{it})}{Z_1^{-}(e^{it})}=\left|G(e^{it})\right|,\ \frac{Z_2^{+}(e^{it})}{Z_2^{-}(e^{it})}=e^{i\theta(t)},\ \text{п. в. } t\in[-\pi,\pi].$$

Следовательно,

$$\frac{Z_\theta^{+}(e^{it})}{Z_\theta^{-}(e^{it})}=\frac{Z_1^{+}(e^{it})Z_2^{+}(e^{it})}{Z_1^{-}(e^{it})Z_2^{-}(e^{it})}=\left|G(e^{it})\right|e^{i\theta(t)}=G(e^{it})$$

или

$$Z_\theta^{+}(\tau)-G(\tau)Z_\theta^{-}(\tau)=0,\ \text{п. в. } \tau\in\gamma,$$

т. е. функция $Z_\theta(z)$ удовлетворяет соотношению (6.2.1).

Относительно общего решения задачи Римана (6.2.1) справедлива

Теорема 6.2.1. *Пусть коэффициент* G *задачи Римана (6.2.1) удовлетворяет условиям:*

i) $G^{\pm 1}(e^{it}) \in L_\infty(-\pi,\pi)$;

ii) $\theta(t)$ *- кусочно гельдерова на отрезке* $[-\pi,\pi]$, $\theta(t) = \theta_0(t) + \theta_1(t)$, *где* $\theta_0(t)$ *- непрерывная часть* $\theta(t)$, $\theta_1(t)$ *- функция скачков* $\theta(t)$ *в точках разрыва* $-\pi < s_1 < s_2 < \ldots\ldots < s_r < \pi$, *т. е.*

$$\theta_1(-\pi) = 0, \ \theta_1(t) = \sum_{k: t< s_k} h_k, \ t \in (-\pi,\pi],$$

где $h_k = \theta(s_k + 0) - \theta(s_k - 0)$, $k = \overline{1,r}$.

iii) последовательность $\{h_k\}_0^r$, $h_0 = \theta(-\pi) - \theta(\pi)$ *удовлетворяет условию:*

$$-\frac{1}{q} < \frac{h_k}{2\pi} \le \frac{1}{p}, \ k = \overline{0,r}. \tag{6.2.4}$$

Тогда:

α) *при* $m \ge 0$ *задача (6.2.1) имеет общее решение вида*

$$F(z) = Z_\theta(z) P_k(z), \tag{6.2.5}$$

где $P_k(z)$ *- произвольный многочлен степени* $k \le m$;

β) *при* $m < 0$ *задача (6.2.1) имеет тривиальное решение* $F(z) = 0$.

Доказательство. Пусть $m \ge 0$ и $F(z)$ является решением задачи (6.2.1). Рассмотрим следующую кусочно-аналитическую функцию

$$\Phi(z) = \frac{F(z)}{Z_\theta(z)}, \ z \notin \gamma.$$

Так как функция $Z_\theta(z)$ не имеет нулей и полюсов в $C \setminus \gamma$, то функции $\Phi(z)$ и $F(z)$ имеют одинаковые порядки на бесконечности. Обозначим через $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ функцию $\Phi(z)$ внутри и вне γ, соответственно. Выясним вопрос принадлежности функции $\Phi^+(z)$ пространству H_1^+. Известно ([12], стр. 273), что $Z_2^{\pm 1}(z) \in H_\delta^+$ при достаточно малом $\delta > 0$. Далее, используя неравенство Йенсена, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|Z_1^{\pm1}(\rho e^{it})\right|^p dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left(\frac{\pm p}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|G(e^{is})\right|\frac{e^{is}+z}{e^{is}-z}ds\right)dt \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|G(e^{is})\right|^{\pm\frac{p}{2}}P(\rho, t-s)ds\right)dt \le \|G\|_{L_\infty}^{\pm\frac{p}{2}},$$

т. е. $Z_1^{\pm1}(z)\in H_p^+$, $p>0$. Поэтому в силу неравенства Гельдера получаем, что $Z_\theta^{\pm1}(z)\in H_\delta^+$ при достаточно малом $\delta>0$. С другой стороны, из $F^+(z)\in H_{p)}^+$, $p>1$, следует, что $F^+(z)\in H_{p-\varepsilon}^+$, для $\forall\varepsilon\in(0,p-1)$. Следовательно

$$\Phi^+(z) = F^+(z)[Z_\theta^+(z)]^{-1}\in H_\delta^+$$

при достаточно малом $\delta>0$. Так как

$$\frac{e^{is}+e^{it}}{e^{is}-e^{it}} = ictg\frac{t-s}{2},$$

то равенство (6.2.2) для $Z_1^\pm(e^{it})$ можно переписать в виде

$$Z_1^\pm(e^{it}) = \exp\left\{\pm\frac{1}{2}\ln\left|G(e^{it})\right| + \frac{i}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|G(e^{is})\right|ctg\frac{t-s}{2}ds\right\}.$$

Отсюда, $\left|Z_1^\pm(e^{it})\right| = \left|G(e^{it})\right|^{\pm\frac{1}{2}}$. Значит $[Z_1^-(e^{it})]^{-1}\in L_\infty(-\pi,\pi)$. Положим

$$u_0(t) = \left|\sin\frac{t+\pi}{2}\right|^{-\frac{h_0^{(0)}}{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta_0(s)ctg\frac{t-s}{2}ds\right\},$$

$$u(t) = \prod_{k=0}^{r}\left|\sin\frac{t-s_k}{2}\right|^{\frac{h_k}{2\pi}},$$

где $h_0^{(0)} = \theta(\pi)-\theta(-\pi)$. По результатам работы [23] граничные значения $\left|Z_2^-(e^{it})\right|$ можно представить как $\left|Z_2^-(e^{it})\right| = u_0(t)u^{-1}(t)$ и $u_0^{\pm1}(t)\in L_\infty(-\pi,\pi)$. Имеем

$$\left|Z_\theta^-(e^{it})\right|^{-1} = \left|Z_1^-(e^{it})\right|^{-1}\left|Z_2^-(e^{it})\right|^{-1} =$$

$$= \left|Z_1^-(e^{it})\right|^{-1}u_0^{-1}(t)u(t) = \left|G(e^{it})\right|^{\frac{1}{2}}u_0^{-1}(t)u(t). \qquad (6.2.6)$$

Поэтому

$$\left|Z_\theta^+(e^{it})\right|^{-1} = \left|G(e^{it})\right|^{-1}\left|Z_\theta^-(e^{it})\right|^{-1} \sim u(t),\ t\in[-\pi,\pi].$$

Из выражения

$$\Phi^-(e^{it}) = F^-(e^{it})[Z_\theta^-(e^{it})]^{-1}$$

и $F^-(e^{it}) \in L_{p)}(-\pi,\pi)$ следует, что если $[Z_\theta^-(e^{it})]^{-1} \in \left(L_{p)}(-\pi,\pi)\right)'$, то $\Phi^-(e^{it}) \in L_1(-\pi,\pi)$. Из (6.2.6) следует, что включение $[Z_\theta^-(e^{it})]^{-1} \in \left(L_{p)}(-\pi,\pi)\right)'$ равносильно включению $u(t) \in \left(L_{p)}(-\pi,\pi)\right)'$. В силу Следствия 6.1.1 включение $u(t) \in \left(L_{p)}(-\pi,\pi)\right)'$ выполняется в том и только в том случае, когда имеют место условия

$$-\frac{1}{q} < \frac{h_k}{2\pi},\ k = \overline{0,r}.$$

Таким образом, учитывая (6.2.4) получим $\Phi^-(e^{it}) \in L_1(-\pi,\pi)$. С другой стороны, для почти всех $\tau \in \gamma$ имеем

$$\Phi^+(\tau) = F^+(\tau)[Z_\theta^+(\tau)]^{-1} = F^-(\tau)[Z_\theta^-(\tau)]^{-1} = \Phi^-(\tau).$$

Поэтому функция $\Phi(z)$ является многочленом $P_k(z)$ степени $k \le m$. Следовательно, если $F(z)$ решение задачи (6.2.1), то из формулы $F(z) = Z_\theta(z)\Phi(z)$ следует, что $F(z)$ можно представить в виде $F(z) = Z_\theta(z)P_k(z)$, где $P_k(z)$ - многочлен степени $k \le m$, а при $m < 0$ имеем $F(z) = 0$.

Выясним условие, при котором функция $F(z)$, определенная по формуле (6.2.5), является решением задачи (6.2.1). Очевидно, что для функции $F(z)$ выполняется равенство (6.2.1). Остается показать справедливость включений $F^+(z) \in H_{p)}^+$, $p > 1$, и $F^-(z) \in_m H_{p)}^-$, $p > 1$. Сначала покажем справедливости включения $F^+(z) \in H_{p)}^+$, $p > 1$. Для этого по Теореме 6.1.4 достаточно показать $F^+ \in H_1^+$ и $F^+(e^{it}) \in L_{p)}(-\pi,\pi)$, $p > 1$. Так как при достаточно малом $\delta > 0$ имеет место $Z_\theta^{\pm 1}(z) \in H_\delta^+$, то из равенства (6.2.5) следует, что $F^+(z) \in H_\delta^+$, при достаточно малом $\delta > 0$. Из представления $Z_\theta^+(e^{it}) = G(e^{it})Z_\theta^-(e^{it})$ и равенства (6.2.6) получим

$$\left|F^+(e^{it})\right| = \left|Z_\theta^+(e^{it})\right|\left|P_k(e^{it})\right| = \left|G(e^{it})\right|^{-\frac{1}{2}}\left|P_k(e^{it})\right|u_0(t)u^{-1}(t). \qquad (6.2.7)$$

Отсюда следует, что включение $F^+(e^{it}) \in L_1(-\pi,\pi)$ равносильно включению $u^{-1}(t) \in L_1(-\pi,\pi)$. Ясно, что включение $u^{-1}(t) \in L_1(-\pi,\pi)$ имеет место в том и только в том случае, когда $\frac{h_k}{2\pi} < 1$, $k = \overline{0,r}$. Так как, по условиям теоремы эти неравенства выполняются, и значит, справедливо $F^+(e^{it}) \in L_1(-\pi,\pi)$. Тогда по Теореме Смирнова ([23], стр. 23) имеем $F^+ \in H_1^+$. Теперь покажем, что имеет место $F^+(e^{it}) \in L_{p)}(-\pi,\pi)$. Из (6.2.7) вытекает, что включение $F^+(e^{it}) \in L_{p)}(-\pi,\pi)$ равносильно включению $u^{-1}(t) \in L_{p)}(-\pi,\pi)$. Используя Лемму 6.1.2, получаем, что включение $u^{-1}(t) \in L_{p)}(-\pi,\pi)$ равносильно выполнению условий

$$\frac{h_k}{2\pi} \le \frac{1}{p},\ k = \overline{0,r}.$$

Поэтому из (6.2.7) следует, что $F^+(e^{it}) \in L_{p)}(-\pi,\pi)$, $p > 1$. Таким образом, имеем $F^+(z) \in H_{p)}^+$, $p > 1$.

Теперь покажем справедливость $F^-(z) \in {}_m H_{p)}^-$, $p > 1$. Пусть $m \ge 0$. Тогда ясно, что функция $F^-(z)$ имеет порядок $k \le m$ на бесконечности. Если $F_0^-(z)$ - правильная часть разложения $F^-(z)$ в окрестности бесконечности, то аналогично доказательству $F^+(z) \in H_{p)}^+$ можно доказать, что $\overline{F_0^-(\frac{1}{z})} \in H_{p)}^+$, $p > 1$, т. е. $F^-(z) \in {}_m H_{p)}^-$, $p > 1$. Пусть теперь $m < 0$. Тогда $P_k(z)$ должен быть нулевым многочленом. Теорема доказана.

6.3. Разрешимость неоднородной задачи Римана в классах гранд Харди $H_{p)}^+ \times {}_m H_{p)}^-$

Пусть $G(\tau)$ и $f(\tau)$ - заданные функции на единичной окружности $\gamma = \{z \in C : |z| = 1\}$ такие, что $f \in L_{p)}(\gamma)$, $p > 1$, $G^{\pm 1}(\tau) \in L_\infty(\gamma)$.

Рассмотрим следующую неоднородную задачу Римана в классах $H_{p)}^+ \times {}_m H_{p)}^-$:

$$F^+(\tau) - G(\tau)F^-(\tau) = f(\tau),\ \tau \in \gamma. \tag{6.3.1}$$

Под решением задачи понимается любая пара функций $F^+(z)$ и $F^-(z)$ принадлежащих классам $H^+_{p)}$ и ${}_m H^-_{p)}$ соответственно, граничные значения $F^\pm(\tau)$ на единичной окружности γ, которых почти всюду удовлетворяют (6.3.1). При $f(\tau)=0$ получаем соответствующую однородную задачу

$$F^+(\tau)-G(\tau)F^-(\tau)=0\,,\ \tau\in\gamma\,, \tag{6.3.2}$$

$$(F^+,F^-)\in H^+_{p)}\times{}_m H^-_{p)}\,.$$

Пусть $\theta(t)=\arg G(e^{it})$ и $Z_\theta(z)$ - каноническое решение однородной задачи (6.3.2).

В следующей теореме находится одно частное решение задачи (6.3.1).

Теорема 6.3.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $G^{\pm1}(\tau)\in L_\infty(\gamma)$, $\theta(t)$ *- кусочно гельдерова на отрезке* $[-\pi,\pi]$, $\theta(t)=\theta_0(t)+\theta_1(t)$, *где* $\theta_0(t)$ *- непрерывная часть* $\theta(t)$, $\theta_1(t)$ *-функция скачков* $\theta(t)$ *в точках разрыва* $-\pi<s_1<s_2<......<s_r<\pi$, *т. е.*

$$\theta_1(-\pi)=0\,,\ \theta_1(t)=\sum_{k:t<s_k}h_k\ ,\ t\in(-\pi,\pi]\,,$$

где $h_k=\theta(s_k+0)-\theta(s_k-0)$, $k=\overline{1,r}$, $h_0=\theta(-\pi)-\theta(\pi)$.

2) последовательность $\{h_k\}_0^r$ *удовлетворяет условию*

$$-\frac{1}{q}<\frac{h_k}{2\pi}<\frac{1}{p}\,,\ k=\overline{0,r}\,. \tag{6.3.3}$$

Тогда кусочно-аналитическая функция

$$F_1(z)=\frac{Z_\theta(z)}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)[Z^+_\theta(\xi)]^{-1}}{\xi-z}d\xi\,,\ z\notin\gamma\,, \tag{6.3.4}$$

является решением задачи (6.3.1) в классах гранд Харди $H^+_{p)}\times_{-1}H^-_{p)}$.

Доказательство. Учитывая (6.2.6), имеем

$$\left|Z^+_\theta(e^{it})\right|^{-1}=\left|G(e^{it})\right|^{-1}\left|Z^-_\theta(e^{it})\right|^{-1}=\left|G(e^{it})\right|^{-\frac{1}{2}}u_0^{-1}(t)u(t)\,. \tag{6.3.5}$$

Так как $\left|G(e^{it})\right|^{-\frac{1}{2}},u_0^{-1}(t)\in L_\infty(-\pi,\pi)$, то из (6.3.5) следует, что включение $[Z^+_\theta(e^{it})]^{-1}\in\left(L_{p)}(-\pi,\pi)\right)'$ равносильно включению $u(t)\in\left(L_{p)}(-\pi,\pi)\right)'$. В силу

Следствия 6.1.1 последнее условие выполняется в том и только в том случае, когда имеют место условия

$$\frac{h_k}{2\pi} > -\frac{1}{q}, \ k = \overline{0,r}.$$

Тогда в силу (6.3.3) получаем $[Z_\theta^+(e^{it})]^{-1} \in \left(L_{p)}(-\pi,\pi)\right)'$. Из $f(e^{it}) \in L_{p)}(-\pi,\pi)$ и $[Z_\theta^+(e^{it})]^{-1} \in \left(L_{p)}(-\pi,\pi)\right)'$ следует

$$f(e^{it})[Z_\theta^+(e^{it})]^{-1} \in L_1(-\pi,\pi).$$

Значит, $F_2(z) \in H_\delta^+$, $\delta \in (0,1)$, где

$$F_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)[Z_\theta^+(\xi)]^{-1}}{\xi - z}\,d\xi.$$

Так как $Z_\theta^{\pm 1}(z) \in H_\delta^+$ при достаточно малом $\delta > 0$, то из неравенства Гельдера следует, что $F_1(z) \in H_\delta^+$ при достаточно малом $\delta > 0$. Из формул Сохоцкого-Племеля следует

$$F_1^\pm(\tau) = Z_\theta^\pm(\tau)\left(\pm\frac{1}{2}f(\tau)[Z_\theta^+(\tau)]^{-1} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)[Z_\theta^+(\xi)]^{-1}}{\xi - \tau}\,d\xi\right), \qquad (6.3.6)$$

для почти всех $\tau \in \gamma$. Следовательно

$$\frac{F_1^+(\tau)}{Z_\theta^+(\tau)} - \frac{F_1^-(\tau)}{Z_\theta^-(\tau)} = \frac{f(\tau)}{Z_\theta^+(\tau)},$$

или

$$F_1^+(\tau) - G(\tau)F_1^-(\tau) = f(\tau),$$

для почти всех $\tau \in \gamma$, т.е $F_1(z)$ удовлетворяет почти всюду на γ уравнению (6.3.1). Покажем, что $F_1(z) \in H_{p)}^+$, $p > 1$. Для этого сначала установим $F_1^+(\tau) \in L_{p)}(\gamma)$. Представим (6.3.6) в виде

$$F_1^\pm(\tau) = Z_\theta^\pm(\tau)\left(\pm\frac{1}{2}f(\tau)[Z_\theta^+(\tau)]^{-1} + S_\gamma(f(\xi)[Z_\theta^+(\xi)]^{-1})(\tau)\right). \qquad (6.3.7)$$

Из (6.3.7) получаем

$$F_1^+(\tau) = \frac{1}{2}f(\tau) + Z_\theta^+(\tau)S_\gamma(f(\xi)[Z_\theta^+(\xi)]^{-1})(\tau).$$

Поскольку $f(\tau)\in L_{p)}(\gamma)$, $p>1$, из последнего равенства следует $F_1^+(\tau)\in L_{p)}(\gamma)$, $p>1$, если $Z_\theta^+ S_\gamma\left(\frac{f}{Z_\theta^+}\right)(\tau)\in L_{p)}(\gamma)$, $p>1$. Пусть

$$\rho(t)=\left|t^2-\pi^2\right|^{-\frac{h_0}{2\pi}}\prod_{k=1}^{r}\left|t-s_k\right|^{-\frac{h_k}{2\pi}},\ t\in[-\pi,\pi].$$

Из (6.3.5) следует $\left|Z_\theta^+(e^{it})\right|\sim\rho(t)$, $t\in[-\pi,\pi]$. Поэтому принадлежность $Z_\theta^+ S_\gamma\left(\frac{f}{Z_\theta^+}\right)(\tau)\in L_{p)}(\gamma)$ равносильно принадлежности $\rho(t)S_\gamma\left(\frac{f}{\rho}\right)(e^{it})\in L_{p)}(-\pi,\pi)$.

Согласно условию (6.3.3) $\exists\varepsilon_0\in(0,p-1)$:

$$-1+\frac{1}{p-\varepsilon_0}<\frac{h_k}{2\pi}<\frac{1}{p},\ k=\overline{0,r}.$$

Отсюда получаем

$$-1+\frac{1}{p-\varepsilon}<\frac{h_k}{2\pi}<\frac{1}{p-\varepsilon},\ k=\overline{0,r},\ \exists\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]. \tag{6.3.8}$$

Согласно (6.3.8) весовая функция $\rho(t)$ принадлежит классу Макенхоупта $A_{p-\varepsilon}(-\pi,\pi)$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$. Следовательно, $\rho S_\gamma\left(f\rho^{-1}\right)$ ограничен в пространстве $L_{p-\varepsilon}(-\pi,\pi)$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$. По Теореме Рисса-Торина ([108], стр. 316) имеем

$$\left\|\rho S_\gamma(fg^{-1})\right\|_{p-\varepsilon}\le c_{p-\varepsilon}\|f\|_{p-\varepsilon},\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0] \tag{6.3.9}$$

и $c_{p-\varepsilon}\le c_{p-\varepsilon_0}^{1-\theta(\varepsilon)}c_p^{\theta(\varepsilon)}$, где $\theta(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon_0-\varepsilon}{\varepsilon_0(p-\varepsilon)}$. Примем следующие обозначения

$$I_1(\varepsilon_0)=\sup_{0<\varepsilon\le\varepsilon_0}\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left\|\rho S_\gamma(f\rho^{-1})\right\|_{L^{p-\varepsilon}},$$

$$I_2(\varepsilon_0)=\sup_{\varepsilon_0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left\|\rho S_\gamma(f\rho^{-1})\right\|_{L^{p-\varepsilon}}.$$

Сначала оценим $I_1(\varepsilon_0)$. Используя (6.3.9), получаем

$$I_1(\varepsilon_0)=\sup_{0<\varepsilon\le\varepsilon_0}\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left\|S_\gamma(f\rho^{-1})\right\|_{L_\rho^{p-\varepsilon}}\le c(\varepsilon_0)\sup_{0<\varepsilon\le\varepsilon_0}\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left\|f\rho^{-1}\right\|_{L_\rho^{p-\varepsilon}}=$$

$$=c(\varepsilon_0)\sup_{0<\varepsilon\le\varepsilon_0}\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\|f\|_{L^{p-\varepsilon}}\le c(\varepsilon_0)\sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\|f\|_{L^{p-\varepsilon}}=c(\varepsilon_0)\|f\|_{L^{p)}}<+\infty,$$

где $c(\varepsilon_0) = \sup\limits_{0<\varepsilon\le\varepsilon_0} c_{p-\varepsilon}$. Теперь оценим $I_2(\varepsilon_0)$. Для $\forall\varepsilon$: $\varepsilon_0 < \varepsilon < p-1$ имеем $p-\varepsilon < p-\varepsilon_0$. Поэтому в силу неравенства Гельдера имеем

$$\|f\|_{p-\varepsilon} \le \|f\|_{p-\varepsilon_0} (2\pi)^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{(p-\varepsilon)(p-\varepsilon_0)}} .$$

Таким образом

$$I_2(\varepsilon_0) \le \sup_{\varepsilon_0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|\rho S_\gamma(f\rho^{-1})\|_{p-\varepsilon_0} (2\pi)^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{(p-\varepsilon)(p-\varepsilon_0)}} =$$

$$= 2\pi^{-\frac{1}{p-\varepsilon_0}} \sup_{\varepsilon_0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|S_\gamma(f\rho^{-1})\|_{p-\varepsilon_0,\rho} \le$$

$$= 2\pi^{-\frac{1}{p-\varepsilon_0}} c_{p-\varepsilon_0} \sup_{\varepsilon_0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\rho^{-1}\|_{p-\varepsilon_0,\rho} \le 2\pi^{-\frac{1}{p-\varepsilon_0}} c_{p-\varepsilon_0} (p-1)\|f\|_{p-\varepsilon_0} < +\infty .$$

Следовательно

$$\|\rho S_\gamma(f\rho^{-1})\|_{p)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|\rho S_\gamma(f\rho^{-1})\|_{p-\varepsilon} \le I_2(\varepsilon_0) + I_2(\varepsilon_0) < +\infty ,$$

т. е. $\rho S_\gamma(f\rho^{-1})(\tau) \in L_{p)}(-\pi,\pi)$ и тем самым $F_1^+(\tau) \in L_{p)}(-\pi,\pi)$, $p>1$. Из $L_{p)}(-\pi,\pi) \subset L_{p-\varepsilon}(-\pi,\pi)$, $0<\varepsilon<p-1$, следует, что функцию $F_1^+(z)$ можно представить по формуле Коши

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F_1^+(\xi)}{\xi - z} d\xi .$$

Следовательно, по Теореме 6.1.5 получаем $F_1(z) \in H_{p)}^+$, $p>1$.

Далее, очевидно, что $\lim\limits_{z\to\infty} F_1(z) = 0$. Поэтому Лорановское разложение $F_1(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки имеет следующий вид

$$F_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{m} a_k z^k , \ m \le -1 .$$

Аналогично доказательству включения $F_1(z) \in H_{p)}^+$, $p>1$, доказывается, что $\overline{F_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \in H_{p)}^+$, $p>1$. Таким образом, $(F_1^+, F_1^-) \in H_{p)}^+ \times_{-1} H_{p)}^-$, $p>1$, и значит, $F_1^+(z)$ является решением задачи (6.3.1) в $H_{p)}^+ \times_{-1} H_{p)}^-$. Теорема доказана.

Теперь найдем общее решение неоднородной задачи (6.3.1) в классах $H^{+}_{p)}\times_m H^{-}_{p)}$, $p>1$. Имеет место следующая

Теорема 6.3.2. *Пусть выполнены условия теоремы 6.3.1.*

Тогда в классе $H^{+}_{p)}\times_m H^{-}_{p)}$, $p>1$, *имеет место:*

α) *при* $m\geq -1$ *задача (6.3.1) имеет общее решение вида*

$$F(z)=Z_{\theta}(z)P_k(z)+F_1(z), \tag{6.3.10}$$

где $P_k(z)$ *- многочлен степени* $k\leq m$ *(при* $m=-1$, $P_k(z)=0$*) и* $F_1(z)$ *- функция, определенная по формуле (6.3.4).*

β) *при* $m<-1$ *задача (6.3.1) разрешима тогда и только тогда, когда правая часть* $f(\tau)\in L_{p)}(-\pi,\pi)$, $p>1$, *удовлетворяет условию ортогональности*

$$\int_{-o}^{\pi}\frac{f(e^{it})}{Z^{+}_{\theta}(e^{it})}e^{ikt}dt=0,\ k=\overline{1,-m-1}, \tag{6.3.11}$$

при этом задача (6.3.1) имеет единственное решение $F(z)=F_1(z)$.

Доказательство. Ясно, что если $F_0(z)$ - общее решение однородной задачи (6.3.2) и $F_1(z)$ частное решение задачи (6.3.1) в $H^{+}_{p)}\times_m H^{-}_{p)}$, $p>1$, то общее решение задачи (6.3.1) в $H^{+}_{p)}\times_m H^{-}_{p)}$, $p>1$, представляется в в виде

$$F(z)=F_0(z)+F_1(z).$$

Рассмотрим сперва случай $m\geq -1$. По Теореме 6.2.1 общее решение однородной задачи (6.3.2) в классе $H^{+}_{p)}\times_m H^{-}_{p)}$, $p>1$, имеет вид $F_0(z)=Z_{\theta}(z)P_k(z)$, где а $P_k(z)$ - многочлен степени $k\leq m$ (при $m=-1$, $P_k(z)=0$). Очевидно, что в силу Теоремы 6.3.1 функция $F_1(z)$ является частным решением задачи (6.3.2) в классе $H^{+}_{p)}\times_m H^{-}_{p)}$, $p>1$.

Пусть теперь $m<-1$. В этом случае по Теореме 6.2.1 однородная задача (6.3.2) имеет только нулевое решение $F_0(z)=0$. Из доказательства Теоремы 6.3.1 следует, что $F_1(z)$ удовлетворяет почти всюду на γ уравнению (6.3.1) и $F_1(z)\in H^{+}_{p)}$, $p>1$. Выясним условие включения $F_1^{-}\in_m H^{-}_{p)}$. Ясно, что $F_1^{-}\in_m H^{-}_{p)}$

справедливо в том и в том случае, когда $F_1(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки имеет Лорановское разложение вида

$$F_1(z)=\sum_{k=-\infty}^{m}a_k z^k\ ,\ m<-1\,. \tag{6.3.12}$$

Найдем Лорановское разложение $F_1(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки

$$F_1(z)=\frac{Z_\theta(z)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(e^{it})}{Z_\theta^+(e^{it})}\frac{e^{it}}{e^{it}-z}dt=-\frac{Z_\theta(z)}{2\pi z}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(e^{it})e^{it}}{Z_\theta^+(e^{it})}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}e^{ikt}z^{-k}\right)dt=$$

$$=-\frac{Z_\theta(z)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(e^{it})}{Z_\theta^+(e^{it})}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}e^{i(k+1)t}z^{-(k+1)}\right)dt=$$

$$=-Z_\theta(z)\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(e^{it})}{Z_\theta^+(e^{it})}e^{-ikt}dt\right)z^k=$$

$$=Z_\theta(z)\sum_{k=-\infty}^{-1}c_k z^k=Z_\theta(z)K(z)\,.$$

Так как $\lim_{z\to\infty}Z_\theta^{\pm1}(z)\neq 0$, то в силу единственности разложения из (6.3.12) и (6.3.12) следует, что

$$K(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1}c_k z^k=\sum_{k=-\infty}^{m}c_k z^k\ ,$$

т. е. $c_k=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(e^{it})}{Z^+(e^{it})}e^{-ikt}dt=0$, $k=m+1;...;-1$. Следовательно, выполнение условий (6.3.11) необходимо и достаточно, чтобы $F_1(z)$ была общим решением задачи (6.3.2) в классе $H_{p)}^+\times_m H_{p)}^-$, $p>1$. Теорема доказана.

6.4. Приложения к базисности возмущенной системы экспонент в пространствах гранд Лебега

Обозначим через $L_{p)}^+(-\pi,\pi)$ подпространство $L_{p)}(-\pi,\pi)$, порожденное сужениями функций из $H_{p)}^+$. Из Теоремы единственности и Теоремы 6.1.5 следует, что оператор $J_+:H_{p)}^+\to L_{p)}^+(-\pi,\pi)$, определенный по формуле

$J_+ f(\xi) = f^+(\xi)$, $\xi \in \gamma$, осуществляет изоморфизм пространств $L^+_{p)}(-\pi,\pi)$ и $H^+_{p)}$. Положим

$$G^+_{p)}(-\pi,\pi) = G_{p)}(-\pi,\pi) \cap L^+_{p)}(-\pi,\pi).$$

Ясно, что $G^+_{p)}(-\pi,\pi)$ является подпространством пространства $L^+_{p)}(-\pi,\pi)$. Положим $GH^+_{p)} = J_+^{-1}(G^+_{p)})$. Пусть теперь ${}_mL^-_{p)}(-\pi,\pi)$ подпространство $L_{p)}(-\pi,\pi)$, порожденное сужениями функций из ${}_mH^-_{p)}$. Обозначим через

$${}_mG^-_{p)}(-\pi,\pi) = G_{p)}(-\pi,\pi) \cap {}_m L^-_{p)}(-\pi,\pi) \text{ и } {}_mGH^-_{p)} = J_-^{-1}({}_mG^-_{p)}(-\pi,\pi)),$$

где изоморфизм $J_- : {}_m H^-_{p)} \to {}_m L^-_{p)}(-\pi,\pi)$ определяется по формуле $J_- f(\xi) = f^-(\xi)$, $\xi \in \gamma$.

Рассмотрим следующую неоднородную задачу Римана в классах $GH^+_{p)} \times {}_m GH^-_{p)}$:

$$F^+(\tau) - G(\tau)F^-(\tau) = f(\tau),\ \tau \in \gamma, \tag{6.4.1}$$

где $G(\tau)$ и $f(\tau)$ - заданные функции на единичной окружности γ .

Пусть $\rho : [-\pi,\pi] \to R_+$ - некоторая весовая функция. Обозначим через

$$G_{p),\rho}(-\pi,\pi) = \left\{ f \in L_{p),\rho}(-\pi,\pi) : \rho f \in G_{p)}(-\pi,\pi) \right\}.$$

Очевидно, что оператор $T : L_{p)}(\gamma) \to L_{p)}(-\pi,\pi)$, определенный по формуле $Tf(t) = f(e^{it})$, $t \in [-\pi,\pi]$, является изоморфизмом. Пусть $G_{p)}(\gamma)$ и $G_{p),\rho}(\gamma)$ образы при отображении T^{-1} пространств $G_{p)}(-\pi,\pi)$ и $G_{p),\rho}(-\pi,\pi)$, соответственно. Для изучения вопроса разрешимости задачи (6.4.1) в классах $GH^+_{p)} \times {}_m GH^-_{p)}$ нам понадобится ограниченность в $G_{p),\rho}(\gamma)$ сингулярного оператора S_γ.

Имеет место следующая

Лемма 6.4.1. *Пусть весовая функция ρ принадлежит классу Макенхоупта $A_p(-\pi,\pi)$. Тогда S_γ ограниченно действует в $G_{p),\rho}(\gamma)$, $p > 1$.*

Доказательство. Возьмем $\forall \delta > 0$ и $\forall f \in G_{p),\rho}(\gamma)$. Тогда существует $g \in L_{p,\rho}(\gamma)$ такой, что

$$\| f - g \|_{p),\rho} < \delta. \tag{6.4.2}$$

В силу ограниченности оператора S_γ в $L_{p),\rho}(\gamma)$, $p>1$, из (6.4.2) получим

$$\left\|S_\gamma(f)-S_\gamma(g)\right\|_{p),\rho}=\left\|S_\gamma(f-g)\right\|_{p),\rho}<\left\|S_\gamma\right\|\delta. \qquad (6.4.3)$$

Так как оператор S_γ также ограничен в $L_{p,\rho}(\gamma)$, то $S_\gamma(g)\in L_{p,\rho}(\gamma)$. Следовательно, согласно (6.4.3) получаем, что $S_\gamma(f)\in G_{p),\rho}(\gamma)$. Лемма доказана.

Теперь изучим вопрос разрешимости задачи (6.4.1).

Имеет место следующая

Теорема 6.4.1. *Пусть коэффициент задачи (6.4.1) удовлетворяет условиям теоремы 6.3.2, и* $f\in G^{p)}(\gamma)$. *Тогда о разрешимости задачи (6.4.1) в классах* $GH^+_{p)}\times_m GH^-_{p)}$, $p>1$, *справедливы следующие утверждения:*

α) *при* $m\ge -1$ *задача (6.4.1) имеет общее решение вида*

$$F(z)=\mathrm{Z}_\theta(z)P_k(z)+F_1(z),$$

где $\mathrm{Z}_\theta(z)$ *- каноническое решение соответствующей однородной, а* $P_k(z)$ *- многочлен степени* $k\le m$ ($P_{-1}(z)\equiv 0$) *и* $F_1(z)$ *- функция, определенная по формуле (6.3.4).*

β) *при* $m<-1$ *задача (6.4.1) разрешима тогда и только тогда, когда функция* $f(\tau)$, $p>1$, *удовлетворяет условию ортогональности (6.3.11). При этом задача (6.4.1) имеет единственное решение* $F(z)=F_1(z)$.

Доказательство. Используя Теорему 6.3.2 получаем, что задача (6.4.1) разрешима в классах $H^+_{p)}\times_m H^-_{p)}$, $p>1$, и имеют место утверждения α) и β). Покажем справедливость включений $F_1^+\in G^+_{p)}(-\pi,\pi)$ и $F_1^-\in_m G^-_{p)}(-\pi,\pi)$. С помощью известных преобразований граничные значения функции $F_1(z)$ выражаются в виде

$$F_1^\pm(\tau)=\mathrm{Z}_\theta^\pm(\tau)\left(\pm\frac{1}{2}f(\tau)[\mathrm{Z}_\theta^+(\tau)]^{-1}+S_\gamma(f(\xi)[\mathrm{Z}_\theta^+(\xi)]^{-1})(\tau)\right),\ \text{п. в. } \tau\in\gamma. \qquad (6.4.4)$$

Сначала проверим принадлежность $F_1^+\in G^+_{p)}(-\pi,\pi)$. Поскольку $F_1\in H^+_{p)}$, то достаточно показать справедливость включения $F_1^+\in G_{p)}(-\pi,\pi)$. Из (6.4.3) получаем

$$F_1^+(\tau)=\frac{1}{2}f(\tau)+Z_\theta^+(\tau)S_\gamma(f(\xi)[Z_\theta^+(\xi)]^{-1})(\tau)\text{, п. в. } \tau\in\gamma .$$

Отсюда следует, что $F_1^+\in G_{p)}(-\pi,\pi)$, если $Z_\theta^+S_\gamma(f[Z_\theta^+]^{-1})\in G_{p)}(-\pi,\pi)$. Из результатов [23] следует, что

$$\left|Z_\theta^+(e^{it})\right|\sim\rho(t)=\left|t^2-\pi^2\right|^{-\frac{h_0}{2\pi}}\prod_{k=1}^{r}\left|t-s_k\right|^{-\frac{h_k}{2\pi}},\ t\in[-\pi,\pi].$$

Таким образом, включение $Z_\theta^+S_\gamma(f[Z_\theta^+]^{-1})\in G_{p)}(-\pi,\pi)$ равносильно включению $\rho(t)S_\gamma(f\rho^{-1})(e^{it})\in G_{p)}(-\pi,\pi)$. Из условия 2) Теоремы 6.3.1 следует, что

$$\exists\varepsilon_0\in(0,p-1):\ \rho\in A_{p-\varepsilon},\ 0\le\varepsilon\le\varepsilon_0. \tag{6.4.5}$$

Так как сингулярный оператор S_γ ограничен в весовом пространстве $L_{p,\rho}(-\pi,\pi)$ и $L_{p),\rho}(-\pi,\pi)$ в том и только в том случае, когда $\rho\in A_p(-\pi,\pi)$, из (6.4.5) следует, что $S_\gamma\in L(L_{p-\varepsilon,\rho})$, $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$. Следовательно, из $f\rho^{-1}\in G_{p),\rho}(-\pi,\pi)$ по Лемме 6.4.1 вытекает, что $S_\gamma(f\rho^{-1})\in G_{p),\rho}(-\pi,\pi)$, и значит, $\rho S_\gamma(f\rho^{-1})\in G_{p)}(-\pi,\pi)$. Аналогично показывается включение $F_1^-\in_m G_{p)}^-(-\pi,\pi)$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим вопрос базисности в $G_{p)}(-\pi,\pi)$ возмущенной системы экспонент вида

$$E_\beta=\left\{e^{i(n-\beta\,sign\,n)t}\right\}_{n\in Z}, \tag{6.4.6}$$

где β - некоторый комплексный параметр. Представим систему (6.4.6) в виде следующей двойной системы

$$E_\beta=\left\{x_n^+;x_k^-\right\}_{n\in Z_+,k\in N},\ x_n^\pm=e^{\pm i(n-\beta)t}.$$

В следующей теореме изучается базисность систем $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z_+}$ и $\left\{e^{-int}\right\}_{n\in N}$ в $G_{p)}^+(-\pi,\pi)$.

Теорема 6.4.2. *Система экспонент* $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z_+}$ *образует базис в пространстве* $G_{p)}^+(-\pi,\pi)$, $1<p<+\infty$.

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $f\in G_{p)}^+(-\pi,\pi)$. В силу базисности $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z}$ в $G_{p)}(-\pi,\pi)$ функция f имеет в $G_{p)}(-\pi,\pi)$ разложение

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n e^{int}\,. \qquad (6.4.7)$$

Из $f\in G^{+}_{p)}(-\pi,\pi)$, следует, что разложение (6.4.7) имеет место в пространстве $L_{p-\varepsilon}(-\pi,\pi)$ при любом $\varepsilon\in(0,p-1)$. Поэтому $a_n=0$ при $n<0$, и значит, разложение (6.4.7) имеет вид

$$f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n e^{int}\,.$$

Единственность такого разложения следует из существования биортогональной системы к $\{e^{int}\}_{n\in Z}$ в $G_{p)}(-\pi,\pi)$. Следовательно, произвольная функция $f\in G^{+}_{p)}(-\pi,\pi)$ однозначно разлагается в ряд по системе $\{e^{int}\}_{n\in Z_+}$, т. е. система $\{e^{int}\}_{n\in Z_+}$ образует базис в пространстве $G^{+}_{p)}(-\pi,\pi)$. Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая

Теорема 6.4.3. *Система экспонент* $\{e^{-int}\}_{n\in N}$ *образует базис в пространстве* $G^{-}_{p)}(-\pi,\pi)$, $1<p<+\infty$.

Перейдем к изучению базисных свойств системы (6.4.6). Нам понадобится следующая

Лемма 6.4.2 ([12]). *Пусть имеет место неравенство* $|\mathrm{Re}\,\beta|<\dfrac{1}{2}$. *Положим*

$$h_n^{+}(t)=\frac{e^{i\beta t}}{2\pi}(e^{it}+1)_-^{-2\beta}\sum_{k=0}^{n}C_{2\beta}^{k}e^{-ikt},\ n\in Z_+,$$

$$h_n^{-}(t)=\frac{e^{i\beta t}}{2\pi}(e^{it}+1)_-^{-2\beta}\sum_{k=1}^{n}C_{2\beta}^{k}e^{-ikt},\ n\in N,$$

где $(e^{it}+1)_-^{-2\beta}$ *- некоторая однозначная ветвь многозначной функции* $(e^{it}+1)^{-2\beta}$ *и* $C_n^k=\dfrac{n(n-1)(n-2).....(n-k+1)}{k!}$ *- биномиальные коэффициенты. Тогда выполняются следующие равенства*

$$(x_n^{+},h_k^{+})=(x_{n+1}^{-},h_{k+1}^{-})=\delta_{nk}\,,$$

$$(x_{n+1}^{-},h_k^{+})=(x_n^{+},h_{k+}^{-})=0\,,\ n,k\in Z_+\,,$$

и $(x,y)=\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\overline{y(t)}dt$.

В следующем утверждении устанавливается минимальность системы (6.4.6) в $L_{p)}(-\pi,\pi)$.

Теорема 6.4.4. *Пусть имеет место неравенство*

$$-1<2\operatorname{Re}\beta<-\frac{1}{p}+1. \qquad (6.4.8)$$

Тогда система E_β *минимальна в пространстве* $L_{p)}(-\pi,\pi)$, $1<p<+\infty$.

Доказательство. Из Леммы 6.4.2 следует, что если имеет место включение $\{h_n^+;h_k^-\}_{n\in Z_+,k\in N}\subset\left(L_{p)}(-\pi,\pi)\right)^*$, то система $\{h_n^+;h_k^-\}_{n\in Z_+,k\in N}$ является биортогональной к $E_\beta=\{x_n^+;x_k^-\}_{n\in Z_+,k\in N}$. Из

$$(e^{it}+1)^{-2\beta}=\exp\left\{-2\beta(\ln\left|2\sin\frac{\pi-t}{2}\right|+i\frac{t}{2}+2\pi ki)\right\},\ k\in Z,$$

следует, что

$$\left|h_n^{\pm}(t)\right|\sim\left|\sin\frac{\pi-t}{2}\right|^{-2\operatorname{Re}\beta},\ t\in[-\pi,\pi].$$

Поэтому, в силу Следствия 6.1.1, включение $\{h_n^+;h_k^-\}_{n\in Z_+,k\in N}\subset\left(L_{p)}(-\pi,\pi)\right)^*$ выполняется в том и только в том случае, когда $2\operatorname{Re}\beta<-\frac{1}{p}+1$. Таким образом, согласно неравенству (6.4.8), система E_β имеет в $\left(L_{p)}(-\pi,\pi)\right)^*$ сопряженную систему $\{h_n^+;h_k^-\}_{n\in Z_+,k\in N}$, и значит, минимальна в $L_{p)}(-\pi,\pi)$. Теорема доказана.

Теперь докажем основную теорему о базисности системы (6.4.6) в пространстве $G_{p)}(-\pi,\pi)$. Будем использовать схему приведенную в [12].

Теорема 6.4.5. *Пусть* $2\operatorname{Re}\beta+\frac{1}{p}\notin Z$, $1<p<+\infty$. *Тогда система* E_β *образует базис в* $G^{p)}(-\pi,\pi)$, *тогда и только тогда, когда* $\left[2\operatorname{Re}\beta+\frac{1}{p}\right]=0$.

Дефект E_β *равен* $d(E_\beta)=\left[2\operatorname{Re}\beta+\frac{1}{p}\right]$, *а именно: при* $d(E_\beta)<0$ *система* E_β *не полна, но минимальна в* $G_{p)}(-\pi,\pi)$; *при* $d(E_\beta)>0$ *система* E_β *полна, но не минимальна в* $G_{p)}(-\pi,\pi)$.

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $f \in G_{p)}(-\pi,\pi)$. Рассмотрим следующую неоднородную задачу Римана в классе $GH^{+}_{p)} \times_{-1} GH^{-}_{p)}$

$$F^{+}(e^{it}) - e^{i2\beta t} F^{-}(e^{it}) = e^{i\beta t} f(t)\,, \text{ п.в. } t \in [-\pi,\pi]. \tag{6.4.9}$$

Имеем $G(t) = e^{i2\beta t}$ и $\theta(t) = \arg e^{i2\beta t} = 2\operatorname{Re}\beta t$. Функция $\theta(t) = 2\operatorname{Re}\beta t$ не имеет точек разрыва на $[-\pi,\pi]$ и $h_0 = \theta(-\pi) - \theta(\pi) = -4\pi \operatorname{Re}\beta$. При условии

$$0 < 2\operatorname{Re}\beta + \frac{1}{p} < 1$$

или $-\dfrac{1}{p} < 2\operatorname{Re}\beta < -\dfrac{1}{p} + 1$ и согласно Теореме 6.4.1, в классе $GH^{+}_{p)} \times_{-1} GH^{-}_{p)}$ задача (6.4.8) имеет единственное решение, которое представимо в виде интеграла типа Коши

$$F_1(z) = \frac{Z(z)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\beta t} f(t)}{Z^{+}(e^{it})} K_z(t)\,dt\,,\ z \notin \gamma\,,$$

где $Z(z)$ - каноническое решение соответствующей однородной задачи и $K_z(t) = \dfrac{e^{it}}{e^{it} - z}$. Тогда $F_1^{+}(e^{it}) \in G^{+}_{p)}(-\pi,\pi)$ и $F_1^{-}(e^{it}) \in_{-} G^{-}_{p)}(-\pi,\pi)$. В силу Теорем 6.4.2 и 6.4.3 функции $F_1^{\pm}(e^{it})$ имеют следующие однозначные разложения

$$F_1^{+}(e^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{+} e^{int}\,,$$

$$F_1^{-}(e^{it}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-} e^{-int}\,.$$

Учитывая эти разложения в (6.4.9), получим разложение функции f по системе E_β в $G_{p)}(-\pi,\pi)$. Это разложение единственно, ибо система E_β минимальна в $L_{p)}(-\pi,\pi)$. Таким образом, система E_β является базисом в $G_{p)}(-\pi,\pi)$.

Обратно, пусть $\left[2\operatorname{Re}\beta + \dfrac{1}{p}\right] \neq 0$. Рассмотрим сперва случай $-1 < 2\operatorname{Re}\beta + \dfrac{1}{p} < 0$. Имеем $-\dfrac{1}{p} < 2(\operatorname{Re}\beta + \dfrac{1}{2}) < -\dfrac{1}{p} + 1$. Тогда согласно выше доказанному система $E_{\beta+\frac{1}{2}}$ образует базис в $G_{p)}(-\pi,\pi)$. Совершим следующее преобразование

$$E_{\beta+\frac{1}{2}} = \left\{ e^{-i(\beta+\frac{1}{2})t} e^{\mathrm{int}} ; e^{i(\beta+\frac{1}{2})t} e^{-ikt} \right\}_{n\in Z_+, k\in N} =$$

$$= \left\{ e^{i\frac{t}{2}} e^{-i\beta t} e^{i(n-1)t} ; e^{i\frac{t}{2}} e^{i\beta t} e^{-ikt} \right\}_{n\in Z_+, k\in N} = e^{i\frac{t}{2}} \left\{ e^{-i\beta t} e^{\mathrm{int}} ; e^{i\beta t} e^{-ikt} \right\}_{n=-1,+\infty, k\in N} = e^{i\frac{t}{2}} E_\beta^- .$$

Отсюда следует, что система E_β^- образует базис в $G_{p)}(-\pi,\pi)$. Следовательно, из соотношения

$$E_\beta^- = \left\{ e^{-i(\beta+1)t} \right\} \cup E_\beta ,$$

получаем, что система E_β не полна, но минимальна в $G_{p)}(-\pi,\pi)$, причем дефект системы E_β равен 1. Совершенно аналогично предыдущему случаю получаем, что если для некоторого $n_0 \in N$ имеет место $-n_0 < 2\operatorname{Re}\beta + \frac{1}{p} < -n_0 + 1$, то система E_β не полна, но минимальна в $G_{p)}(-\pi,\pi)$ и ее дефект равен n_0.

Пусть теперь выполнено неравенство $1 < 2\operatorname{Re}\beta + \frac{1}{p} < 2$. Тогда имеет место неравенство $-\frac{1}{p} < 2(\operatorname{Re}\beta - \frac{1}{2}) < -\frac{1}{p} + 1$. Следовательно, система $E_{\beta-\frac{1}{2}}$ образует базис в $G_{p)}(-\pi,\pi)$. Аналогично вышепоказанным равенствам, получаем, что

$$E_{\beta-\frac{1}{2}} = e^{-i\frac{t}{2}} \left\{ e^{-i\beta t} e^{\mathrm{int}} ; e^{i\beta t} e^{-ikt} \right\}_{n,k\in N} = e^{-i\frac{t}{2}} E_\beta^+ .$$

Тогда система E_β^+ образует базис в $G_{p)}(-\pi,\pi)$. Ясно, что

$$E_\beta = \left\{ e^{-i\beta t} \right\} \cup E_\beta^+ .$$

Следовательно, система E_β полна, но не минимальна в $G_{p)}(-\pi,\pi)$. Значит, дефект системы E_β равен 1. Продолжив аналогичное рассуждение устанавливаем, что если имеет место неравенство $n_0 < 2\operatorname{Re}\beta + \frac{1}{p} < n_0 + 1$, при некотором $n_0 \in N$, то а система E_β полна, но не минимальна в $G_{p)}(-\pi,\pi)$ и ее дефект равен n_0. Теорема доказана.

Выводы

Диссертационная работа посвящена изучению бесселевых, гильбертовых последовательностей, базисов Рисса и фреймов в гильбертовых и в банаховых пространствах относительно пространств последовательностей векторов при билинейных отображениях, получению аналогов теорем Рисса и Пэли в пространствах Лебега со смешанной нормой и в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости, установлению базисности классических системы экспонент и тригонометрических систем синусов и косинусов в подпространствах $G_{p)}$ гранд Лебега, порожденные оператором сдвига, получение аналогов теорем Коровкина и их статистических вариантов в пространствах $G_{p)}$, установлению базисности системы из собственных функций одной разрывной спектральной задачи для дифференциального уравнения второго порядка в $G_{p)}$ и в их весовых вариантах с весом общего вида, определению классов гранд Харди, установление аналогов некоторых классических фактов и изучение вопросов разрешимости краевых задач Римана в классах гранд Харди, а также установлению базисных свойств возмущенной системы экспонент в подпространствах $G_{p)}$ пространствах гранд Лебега.

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. введены понятия b-бесселевых, b-гильбертовых последовательностей, b-базисов Рисса и b-фреймов в гильбертовых и в банаховых пространствах относительно банаховых пространств последовательностей векторов, обобщающие классические понятия и изучены их характеризации;

2. введены понятия несчетных бесселевых и гильбертовых систем в несепарабельных банаховых пространствах и доказаны аналоги классических результатов в этом случае, а также приведены соответствующие примеры;

3. получены обобщения теорем возмущения и устойчивости базисов и фреймов относительно b-базисов и b-фреймов в гильбертовых и в банаховых пространствах;

4. найдены аналоги теорем Рисса и Пэли в пространствах Лебега со смешанной нормой и в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости;

5. установлено существование и единственность обобщенного решения смешанной задачи для одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка в пространстве $B_{p,p,T}^{1+\frac{2}{q},\frac{2}{q}}$ (q, p - сопряженные числа), $p \geq 2$;

6. доказаны базисности классических системы экспонент и тригонометрических систем синусов и косинусов в подпространствах $G_{p)}$ гранд Лебега, порожденные оператором сдвига;

7. доказана базисность системы собственных функций дифференциального оператора одной разрывной спектральной задачи в прямой сумме пространств $G_{p)} \oplus C$, где C – комплексная плоскость;

8. доказана ограниченность сингулярного оператора в весовом пространстве $G_{p),\rho}$ в случае, когда весовая функция удовлетворяет условию Макенхоупта;

9. доказана базисность системы собственных функций одной разрывной спектральной задачи для дифференциального уравнения второго порядка в весовом пространстве $G_{p),\rho}$ с весом общего вида;

10. определены классы гранд Харди $H_{p)}$, установлены аналоги теорем Рисса, Смирнова и изучены вопросы разрешимости краевых задач Римана в классах гранд Харди;

11. полученные результаты применены к установлению базисности системы экспонент с линейной фазой в подпространствах гранд Лебега $G_{p)}$.

Список используемой литературы

1. Аллахвердиев, Дж.Э., Ахмедов, А.М. Некоторые классы обобщенных спектральных операторов и их приложения // – Москва: Математический сборник, – 1989. т.180, №8, – с. 603–624.
2. Астафьева, Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // – Москва: Успехи физических наук, – 1996, т. 166, № 11, – с. 1–26.
3. Аткинсон, Ф.Б. Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф.Б.Аткинсон. – Москва: Мир, – 1968. – 749 с.
4. Бабенко, К.И. О сходимости в среднем кратных рядов Фурье и асимптотике ядра Дирихле сферических средних / К.И.Бабенко. – Москва: Препринт ИПМ АН СССР, – 1971. – 70 с.
5. Бари, Н.К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // – Москва: Ученые записки МГУ, – 1951, 4:148. – с. 69–107.
6. Барменков, А.Н. Об аппроксимативных свойствах некоторых систем функций: / Дисс. кандидата физика математических наук. / – Москва: –1983. –114 с.
7. Барменков, А.Н., Казьмин, Ю.А. Полнота систем функций специального вида. В кн. Теория отображений, ее обобщения и приложения // – Киев: Наукова думка, Сборник научных трудов, –1982. – с. 29–43.
8. Билалов, Б.Т. Некоторые вопросы аппроксимации / Б.Т.Билалов. – Баку: Элм, – 2016. – 390 с.
9. Билалов, Б.Т. О решении задачи А. Г. Костюченко // – Новосибирск: Сибирский математический журнал, – 2012. т.53, №3, – с. 509–526.
10. Билалов, Б.Т. Базисность некоторых систем экспонент косинусов и синусов // – Москва: Дифференциальные уравнения, – 1990. т.26, №1, – с.10–16.
11. Билалов, Б.Т. Базисные свойства некоторых систем экспонент, косинусов и синусов // – Новосибирск: Сибирский математический журнал, – 2004. т.45, №2, – с. 264–273.

12. Билалов, Б.Т. О базисности возмущенной системы экспонент // – Новосибирск: Сибирский математический журнал, – 2019. т.45, №2, – с. 264–273.

13. Билалов, Б.Т. О базисности систем экспонент, косинусов и синусов в L_p // – Москва: Дак. РАН, – 2001. т.365, №2, – с. 7–9.

14. Билалов, Б.Т., Гусейнов, З.Г. K-бесселевы и K-гильбертовы системы. K-базисы // – Москва: Док. РАН., – 2009, т.429, №3, – с. 1–3.

15. Бицадзе, А.В. Об одной системе функций // – Москва: Успехи математических наук, –1950. т.5, 38, №4, – с. 154–155.

16. Бочкарев, С.В. Теорема Хаусдорфа-Юнга-Рисса в пространствах Лоренца и мультипликативные неравенства // – Москва: Труды Математического Института имени В.А.Стеклова, –1997. т. 219, – с. 103–114.

17. Вейц, Б.Е. Системы Бесселя и Гильберта в пространствах Банаха и вопросы устойчивости // – Казань: Известия высших учебных заведений. Математика, – 1965. 2:45, – с. 7–23.

18. Векуа, И.Н. Системы дифференциальных уравнений 1-го порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек, // – Москва: Математический сборник, – 1952. 31(73), – с. 217–314.

19. Гапошкин, В.Ф. Одно обобщение теоремы Рисса о сопряженных функциях // – Москва: Математический сборник, –1958. т.46(88), №3, – с. 111–115.

20. Гасымов, М.Г. К теории полиномиальных операторных пучков // Доклады АН СССР, – 1971. т.199, №4, – с. 747–750.

21. Гахов, Ф.А. Краевые задачи / Ф.А.Гахов. – Москва: Наука, –1977. – 640 с.

22. Гохберг, И.Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / И.Ц.Гохберг, М.Г.Крейн. – Москва: Наука, –1965. – 448 с.

23. Данилюк, И.И. Нерегулярные граничные задачи на плоскости / – Москва: Наука, –1975. – 296 с.

24. Девдариани, Г.Г. О базисности одной системы функций // – Москва: Дифференциальные уравнения, – 1986, т. 22, №1, – с. 170–171.

25. Жамалов, Р.С. Задача с косой производной для одного уравнения третьего порядка// «Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики», –Новосибирск: –1989, –с. 115–116.
26. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды: [в 2 томах] / – Москва: Наука, – 1965, т.2, – 526 с.
27. Исмайлов, М.И. О связи между b-бесселевостью и b-гильбертовостью системы // Материалы Международной Конференции, посвященной 100-ю академика З.И.Халилова, – Баку: – 2011, – с. 175–176.
28. Исмайлов, М.И. Об устойчивости непрерывных фреймов // – Баку: Вестник Бакинского Государственного Университета. Серия физико-математических наук, – 2017. № 4, – с. 72–81.
29. Исмайлов, М.И. Об эквивалентных свойствах систем, близких к b-базису в банаховых пространствах // – Баку: Вестник Бакинского Государственного Университета, Серия физико-математических наук, – 2011. № 3, – с. 57–65.
30. Исмайлов, М.И. Гильбертовы обобщения b-бесселевых систем // – Саратов: Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика, – 2011. вып.3, т.11, – с. 3–10.
31. Исмайлов, М.И. О b-бесселевых системах // Тезисы Международной Конференции, посвященной 80-летию академика Ф.Г.Максудова, – Баку: – 2010, – с. 181–182.
32. Исмайлов, М.И. О некоторых результатах устойчивости $b_{\tilde{X}}$-атомарного разложения // – Baku: Transactions of NAS of Azerbaijan. – 2014. 34, №1, – p. 67–72.
33. Исмайлов, М.И. Об устойчивости атомарного b-разложения // Материалы Международной Конференции, посвященной 100-ю академика И.И.Ибрагимова, – Баку: – 2012, – с. 113–115.
34. Ismailov, M.I., Guliyeva, F. and Nasibov, Y. On a generalization of the Hilbert frame generated by the bilinear mapping // – London: Journal of Function Spaces, – 2016. – p. 1–8.

35. Исмайлов М.И., Системы Рисса-Фишера в несепарабельных банаховых пространствах // Современные проблемы теории функций и их приложения, Материалы 19-й международной Саратовской зимней школы, посвященной 90-летию со дня рождения академика П.Л.Ульянова, – Саратов: – 2018, – с. 139–140.
36. Исмайлов, М.И., Насибов, Ю. И. О разрешимости одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка // Современные методы теории краевых задач, Материалы международной конференции, посвященной 90-летию В.А. Ильина, –2–6 мая, – Москва: – 2018, – с. 111.
37. Капустин, Н.Ю., Моисеев, Е.И. О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии // – Москва: Дифференциальные уравнения, – 1997. т.33, №1, – с. 115–119.
38. Капустин, Н.Ю., Моисеев, Е.И. О базисности в пространстве систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии // – Москва: Дифференциальные уравнения, – 2000. т.36, №10, – с.1357–1360.
39. Капустин, Ю.Н., Моисеев, Е.И. К проблеме сходимости спектральных разложений для одной классической задачи со спектральным параметром в граничном условии // – Москва: Дифференциальные уравнения, – 2001. т.37, №12, – с. 1599–1604.
40. Касумов, Т.Б. О базисности собственных функций одного касса квазидифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения, гармонический анализ и их приложения. МГУ, – Москва: – 1987, – с. 22–24.
41. Качмаж, С. Теория ортогональных рядов / С.Качмаж, Г.М.Штейнгауз. – Москва: ГИФМЛ, –1958. – 508 с.
42. Кашин, Б. С., Куликова, Т.Ю. Замечание об описание фреймов общего вида // – Москва: Математические заметки, – 2002. 72:6, – с. 941–945.
43. Келдыш, М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // – Москва: Успехи математических наук, –1971. т.26, № 4, – с.15–41.

44. Керимов, Н.Б., Алиев, З.С. О базисности системы собственных функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // – Москва: Дифференциальные уравнения, – 2007. т.43, №7, – с. 886–895.
45. Керимов, Н.Б., Мирзоев, В.С. О базисных свойствах одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // – Новосибирск: Сибирский математический журнал, – 2003. т.44, №5, – с. 1041–1045.
46. Курбанов, В.М., Ибадов, Э.Дж. О свойствах систем корневых функций разрывного оператора второго порядка // – Москва: Доклады РАН, – 2009. т. 427, №3, – с. 308–312.
47. Козлов, В.Я. О локальной характеристике полной ортогональной нормированной системы функций // – Москва: Математический сборник, 1948. т.23, вып. 3, – с. 441–474.
48. Кожанов, А.И. Смешанная краевая задача для некоторых классов нелинейных уравнений третьего порядка // – Москва: Математический сборник, – 1982. 118, №4, – с. 504–522.
49. Коллатц, Л. Задачи на собственные значения / Л.Коллатц. – Москва: Наука, – 1968. – 504 с.
50. Крейн, М.Г., Лангер, Г.К. К теории квадратичных пучков самосопряженных операторов // ДАН СССР, – 1964. т.154, №6, – с.1258–1261.
51. Ладыженская, О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения / О.А.Ладыженская. – Москва: Гостехиздат, –1953. –279 с.
52. Любарский, Ю.И. Свойства систем линейных комбинаций степеней // – Санкт-Петербург: Алгебра и анализ, – 1989. т.1, №6, – с. 1–69.
53. Любарский, Ю.И., Ткаченко, В.А. О системе $\{e^{n\alpha z}\sin nz\}$ // – Москва: Функциональный анализ и его приложения, – 1984. т.18, вып.2, – с. 69–70.
54. Лянце, В.Э. Методы теории неограниченных операторов / В.Э.Лянце, О.Г.Сторож. – Киев: Наукова думка, – 1983. – 212 с.
55. Маркус, А.С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков / – Кишинев: Штиница, – 1986. – 260 с.

56. Мильман, В.Д. Геометрическая теория пространств Банаха, – Москва: Успехи математических наук, –1970. 25, в.3, – с.113–174.
57. Мирзоев, С.С. Кратное разложение на части собственных присоединенных операторных пучков // – Баку: Спектральная теория операторов, Элм, – 1977. – с. 177–188.
58. Моисеев, Е.И. О базисности систем синусов и косинусов в весовом пространстве // – Москва: Дифференциальные уравнения, – 1998. т.34, №1, – – с. 40–44.
59. Моисеев, Е.И. О базисности систем синусов и косинусов в весовом пространстве // – Москва: Дифференциальные уравнения, – 1984. т.275, №4, – с. 794–798.
60. Мусхелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / – Москва: наука, –1968. – 512 с.
61. Новиков, С.Я. Бесселевы последовательности как проекции ортогональных систем // – Москва: Математические заметки, – 2007. т. 81. вып. 6, – с. 893–903.
62. Нурсултанов, Е.Д. О коэффициентах кратных рядов Фурье из пространств Лоренца // – Москва: Известия РАН, серия математика, – 2000. т.64, – с. 95–122.
63. Олевский, А.М. О продолжении последовательности функций до полной ортонормированной системы // – Москва: Математические заметки, –1969. т. 6, – с. 734–747.
64. Оразов, М.Б., Шкаликов, А.А. Об n-кратной базисности собственных функций некоторых регулярных краевых задач // – Новосибирск: Сибирский математический журнал, – 1976. №3, – с. 627–639.
65. Пономарев, С.М. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в трехмерных областях // ДАН СССР, – 1979, 1. 246, №6, – с. 1303–1304.
66. Расулова, Г.А. Исследование смешанной задачи для одного класса квазилинейных дифференциальных уравнений третьего порядка // – Москва: Дифференциальные уравнения, – 1967. 3, №9, – с. 1578–1591.

67. Седлецкий, А.М. Базисы из экспонент в пространствах $L_p(-\pi,\pi)$ // – Москва: Математические заметки, – 2002. т.72, вып.3, – с. 418–432.
68. Тамаркин, Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и разложении произвольных функций в ряды / Я.Д.Тамаркин. – Петроград: – 1917, – 308 с.
69. Терехин, П.А. Проекционные характеристики бесселевых систем // – Саратов: Известия Саратовского Университета, – 2009. т.9. серия Математика. Механика. Информатика. вып. 1, – с. 44–51.
70. Терехин, П.А. Фреймы в банаховом пространстве // – Москва: Функциональный анализ и ее приложения, – 2010, т. 44, вып. 3, – с. 50–62.
71. Тумаркин, Ю.Б. Устойчивость базисов в *B*-пространствах и в других классах ЛВП // – Харьков: Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Изд-во Харьковского университета, – 1971. вып. 14, – с. 26–35.
72. Фрейзер, М. Введение в вейвлеты в свете линейной алгебры. Пер. с англ. / / – Москва: БИНОМ, – 2007. – 487 с.
73. Харди, Г.Г. Неравенства / Г.Г.Харди, Дж.И.Литллвуд, Г.Полиа. – Москва: Изд-во ЛКИ, – 2008. – 456 с.
74. Худавердиев, К.И. Об обобщенных решениях одномерной смешанной задачи для одного класса квазилинейных дифференциальных уравнений // – Баку: Ученые записки АГУ, серия физ.-мат. наук, – 1965. № 4, – с. 29–42.
75. Худавердиев, К.И. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью / К.И.Худавердиев, А.А.Велиев. – Баку: Чашыоглы, – 2010. – 168 с.
76. Шкаликов, А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // – Москва: Труды семинара имени И.Г.Петровского, – 1983. т. 9, – с. 190–229.

77. Abdollahpour, M.R., Faroughi, M.H., and Rahimi, A. PG-frames in Banach spaces// – Kyiv: Methods of functional Analysis and Topology, –2007. 13, №3, – p. 201–210.
78. Adams, D.R. A note on Riesz potentials // – Durham: Duke Mathematical Journal, – 1975. 42(4), – p. 765–78.
79. Aldroubi, A., Sun, Q., and Tang, W. p-frames and shift invariant subspaces of L_p // – Berlin: Journal of Fourier Analysis and Applications, – 2001. 7, – p. 1–21.
80. Ali, S.T., Antoine, J.P., and Gazeau, J.P. Continuous Frames in Hilbert Spaces // – Columbia: Annals of Physics, – 1993. 222, – p. 1–37.
81. Altomare, F. Korovkin type theorems and approximation by positive linear operators // – Haifa: Surveys in Approximation Theory, – 2010. 6, – p. 92–164.
82. Amirov, Sh., Kozhanov, A.I. A mixed problem for a class of strongly nonlinear higher-order equations of Sobolev type // – Boston: Doklady Mathematics, – 2013. 88, №1, –p. 446–448.
83. Apakov, Yu. P. and Irgashev, B. Yu. Boundary-value problem for a degenerate high-odd-order equation // – Boston: Ukrainian Mathematical Journal, – 2015. 66(10), – p. 1475–1490.
84. Ashyralyev, A., Arjmand, D. A note on the Taylor's decomposition on four points for a third-order differential equation // –Thrace: Applied Mathematics and Computation, 188 (2) (2007), p. 1483-1490.
85. Ashyralyev, A., Belakroum, Kh., Guezane-Lakoud A. Stability of boundary-value problems for third order partial differential equations // – San Marcos: Electronic Journal of Differential Equations, –2017., №53, – p. 1–11.
86. Balan, R. Stability for Fourier frames and wavelet Riesz bases // – Berlin: Journal of Fourier Analysis and Applications, –1997. 3(5), – p. 499–504.
87. Bandaliev, R.A. On an inequality in Lebesgue space with mixed norm and with variable summability exponent // – Moscow: Mathematical Notes, – 2008. 84, – p. 303–313.

88. Beckner, W. Inequalities in Fourier analysis // – Washington Road: Annals of Mathematics, –1975. v.102, – p. 159–182.
89. Bilalov, B.T., Guseynov, Z.G. Basicity criterion of perturbed system of exponents in Lebesgue spaces with variable summability index // – Moscow: Doklady Akademii Nauk, – 2011. v. 436, 5, – p. 586–589.
90. Bilalov, B.T., Gasymov, T.B., Guliyeva, A.A. On the solvability of the Riemann boundary value problem in Morrey-Hardy classes // – Ankara: Turkish Journal of Mathematics, – 2016. 40(50), – p. 1085–1101.
91. Bilalov, B.T., Gasymov, T.B., Maharramova, G.V. On one method of investigation of the basis properties of the discontinuous differential operators // – Baku: Journal of Contemporary Applied Mathematics, – 2016. v.6, №1, – p. 74–81.
92. Bilalov, B.T., Guliyeva, F.A. On the frame properties of degenerate systems of sines // – Warsaw: Journal of Function Spaces and Applications, – 2012. 184186, – p. 1–12.
93. Bilalov, B.T., Guliyeva, F.A. *t*-Frames and their Noetherian Perturbation // – Boston: Complex Analysis and Operator Theory, – 2015. 8, 7, – p. 1405–1418.
94. Bilalov, BT., Guseynov, Z.G. Basicity of a system of exponents with a piece-wise linear phase in variable spaces // – Boston: Mediterranean Journal of Mathematics, – 2012. v. 9, №3, – p. 487–498.
95. Bilalov, B.T., Ismailov, M.I., Nasibov, Y.I. Bessel families and uncountable frames in non-separable Hilbert spaces // – Baku: Doklady NAS of Azerbaijan, – 2017. 61(2), – p. 36–45.
96. Bilalov, B.T., Ismailov, M.I., Nasibov, Y.I. Uncountable Frames in Non-Separable Hilbert Spaces and their Characterization // – Baku: Azerbaijan Journal of Mathematics, – 2018. v. 8, №1, – p. 151–178.
97. Bilalov, B.T., Muradov, T.R. Defectiv bases of Banach spaces // – Baku: Proceedings of NAS of Azerbaijan, – 2005. v.22, – p. 23–26.
98. Bilalov, B. T., Nazarova, T. On Statistical Convergence in Metric Spaces // – Richmond Hill: Journal of Mathematics Research, – 2015. v. 7, №1, – p. 37–43.

99. Bilalov, B.T., Quliyeva, A.A. On basicity of exponential systems in Morrey-type spaces // – Singapore: International Journal of Mathematics, – 2014. v. 25, 6, – p. 1–10.
100. Birkhoff, G.D. On the asymptotic character of the solution of the certain linear differential equations containing parameter // – Washington: Transactions of American Mathematical Society, –1908. v.9, – p. 219–231.
101. Birkhoff, G. D., Langer, R. E. The boundary problems and developments associated with a system of ordinary differential equations of the first order // – Cambridge: Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, – 1923. 58, – p. 49–128.
102. Blasco, O., Pelczynski, A. Theorem of Hardy and Paley for vector-valued analytic functions and related classes of Banach spaces // – Washington: Transactions of American Mathematical Society, – 1991. 323, – p. 335–367.
103. Brown, T.C., Freedman, A.R. The uniform density of sets of integers and Fermat's last Theorem // – Paris: Comptes Rendus de I Academie des Sciences, – 1990. 12, – p. 1–6.
104. Canturija, Z.A. On some properties of biorthogonal systems in Banach space and their applications in spectral theory // – Tbilisi: Soobsh. Akad. Nauk Gruz. SSR. –1964. 2(34), – p. 271–276.
105. Casazza, P.G. and Christensen, O. Approximation of the inverse frame operator and applications to Gabor frames // – Montreal: Journal Approximation Theory, – 2000. 103, №2, – p. 338–356.
106. Casazza, P.G., Christensen, O. and Stoeva, D.T. Frame expansions in separable Banach spaces // – Boston: Journal of Mathematical Analysis and Applications, – 2005. 307, 2, – p. 710–723.
107. Casazza, P.G., Han, D., and Larson, D.R. Frames for Banach space // – Singapore: Contemporary Mathematics, – 1999. 247, – p. 149–182.
108. Castilo, R.E. An Introductory Course in Lebesgue Spaces / R.E.Castilo, H.Rafeiro. – Boston: Springer International Publishing, – 2016. – 455 p.

109. Christensen, O. An Introduction to Frames and Riesz Bases / O.Christensen. – Boston: Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser, – 2002.
110. Christensen, O., Heil, Ch. Perturbations of Frames and Atomic Decompositions // – Berlin: Mathematische Nachrichten, – 1997. 185, – p. 33–47.
111. Christensen, O., Stoeva D. p-frames in separable Banach spaces // – Boston: Advances in Computational Mathematics, – 2003. 18, – p. 117–126.
112. Chui, C. Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications / C. Chui. – Boston: Academic Press, –1992.
113. Coifman, R. Wavelet and Their Applications / R.Coifman. – Boston: Jones and Barlett Publ., – 1992.
114. Cruz-Uribe, D.V. Variable Lebesgue Spaces / D.V.Cruz-Uribe, A.Fiorenza. – Birkhäuser: Applied and Numerical Harmonic Analysis, – 2013.
115. Czaja, W. Remark on Naimark's duality // – Ann Arbor: Proceedings of the American Mathematical Society, – 2008. v. 136. № 3, – p. 867–871.
116. D'onofrio, L., Sbordone, C. and Schiattarella, R. Grand Sobolev spaces and their application in geometric function theory and PDEs // – London: Journal of Fixed Point Theory Applications, – 2013. 13, – p. 309–340.
117. Daubechies, I. Ten Lectures on Wavelets / I.Daubechies. – Philadelphia: SIAM, –1992.
118. Daubechies, I., Grossman, A., Meyer, Y. Painless nonorthogonal expansions // – London: Journal of Mathematical Physics, –1986. v. 27, –p. 1271–1283.
119. Davis, P.L. A quasi linear hyperbolic and related third-order equations // – Boston: Journal of Mathematical Analysis and Applications, – 1975. 51, №3, – p. 596–606.
120. Diening, L. Riesz potential and Sobolev embeddings on generalized Lebesgue and Sobolev spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ // – Berlin: Mathematische Nachrichten, – 2004. 263(1), – p. 31–43.
121. Diening, L. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents / L.Diening, P.Harjulehto, P.Hästö [et al.] – Berlin: Lecture Notes in Math. –2017, Springer-Verlag., – 2011.

122. Diening, L. and Samko, S. Hardy inequality in variable exponent Lebesgue spaces // – Bulgaria: Fractional Calculus and Applied Analysis, – 2007. 10, – p. 1–18.
123. Dremin, I.M., Ivanov, O.V., Nechitailo, V.A. Wavelets and their uses // – Moscow: Uspekhi Fizicheskih Nauk, – 2001. 171(6), – p. 465–501.
124. Duffin, R.J., Schaeffer, A.C. A class of nonharmonic Fourier series // – Washington: Transactions of American Mathematical Society, – 1952. 72, – p. 341–366.
125. Edmunds, D.E. and Meskhi, A. Potential-type operators in $L^{p(x)}$ spaces // – Berlin: Zeitschrift für Analysis and ihre Anwendungen, –2002. 21:3, –p. 681–690.
126. Edmunds, D.E., Rákosník, J. Density of smooth functions in $W^{k,p(x)}(\Omega)$ // – London: Proceeding of the Royal Society of London. Series A, –1992. 437, – p. 229–236.
127. Erdös, R., Tenenbaum, G. Sur les densities de certaines suites dentiers // – London: Proceeding of the Royal Society of London. Series A, –1989. 59(3), – p. 417–438.
128. Fan, X.L. and Zhao, D. On the spaces $L^{p(x)}$ and $W^{m,p(x)}$ // – Boston: Journal of Mathematical Analysis and Applications, – 2001. 263, – p. 424–446.
129. Fast, H. Sur la convergence statuesque // – Warszawa: Colloquium Mathematicum, –1951. 2, – p. 241–244.
130. Feichtinger, H.G. and Gröchenig, K.H. Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decomposition // – Boston: Journal of Functional Analysis, –1989. 86, – p. 307–340.
131. Fiorenza, A. Duality and reflexivity in grand Lebesgue spaces // – Barcelona: Collectanea Mathematica, –2000. 51(2), –p. 131–148.
132. Fiorenza, A., Karadzhov, G.E. Grand and small Lebesgue spaces and their analogs // – Berlin: Zeitschrift für Analysis and ihre Anwendungen, – 2004. 23(4), – p. 657–681.

133. Fiorenza, A. On the domain and range of the maximal operator / A.Fiorenza M.Krbec, – Czech: Preprint Academy of Sciences of the Czech Rep. 122, –1997, to appear on Nagoya Math. J. –2000.

134. Fratta, G. D., Fiorenza, A. A direct approach to the duality of grand and small Lebesgue spaces // – Nonlinear Anal. 70(7) (– 2009), – p. 2582–2592.

135. Freedman, A.R., Sember J.J. Densities and summability // – London: Pacific Journal of Mathematics, –1981. 95(2), – p. 293–305.

136. Fridy, J. A. On statistical convergence // – Oxford: Analysis, – 1985. 5, – p. 301–313.

137. Fulton, C.T. Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions // – Edinburgh: Proceeding of the Royal Society of Edinburgh, –1977. v.77, – p. 293–308.

138. Gang, W.A Study on the Stability of g-Banach Frames // – Boston: Advances in Mathematics, – 2011. v.40, №4, – p. 400–406.

139. Gasymov, T.B., Akhtyamov, A.M., Ahmedzade, N.R., On the basicity of eigenfunctions of a second-order differential operator with a discontinuity point in weighted Lebesgue spaces // – Baku: Proceeding of IMM of NAS of Azerbaijan, – 2020. v.46, №1, – p. 32–44.

140. Gasymov, T.B., Huseynli, A.A. The basis properties of eigenfunctions of a discontinuous differential operator with a spectral parameter in boundary condition // – Baku: Proceeding of IMM of NAS of Azerbaijan, – 2011. v. 35, –p. 21–32.

141. Gasymov, T.B., Mammadova, S. J. On convergence of spectral expansions for one discontinuous problem with spectral parameter in the boundary condition // – Baku: Transactions of NAS of Azerbaijan, – 2006. 26(4), – p.103–116.

142. Gomilko, A.M., Pivovarchik, V.N. Asymptotics of solutions of the Sturm-Loiuville equation with respect to a parameter // – Boston: Ukrainian Mathematical Journal, – 2001. 53, – p. 742–757.

143. Greenberg, J.M. On the existence, uniqueness, and stability of solutions of the equation $\rho_0 u_{tt} = E(u_x) \cdot u_{xx} + \lambda u_{xxt}$ // – Boston: Journal of Mathematical Analysis and Applications, –1969. 25, – p. 575–591.

144. Gröchenig, K. Describing functions: atomic decomposition versus frames // – Boston: Monatshefte für Mathematik, – 1991. 112(1), – p. 1–41.

145. Gupta, B., Fiorenza, A. and Jain, P. The maximal theorem in weighted grand Lebesgue spaces // – Boston: Studia Mathematica, – 2008. 188(2), – p. 123–133.

146. Han, D., Larson, D.R. Frames, bases and group representations // – Ann Arbor: Memoirs of the American Mathematical Society, – 2000. 147(697), – p. 1–91.

147. Harjulehto, P. and Hästö, P. Lebesgue points in variable exponent spaces // – Barcelona: Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica, – 2004. 29, – p. 295–306.

148. He, X., Volkmer, H. Riesz bases of solutions of Sturm-Lioville equations // – Boston: Journal of Fourier Analysis and Applications, Birkhäuser, – 2001. 7(3), – p. 297–307.

149. Heil, Ch. A Basis Theory Primer / Ch. Heil. – Boston: Birkhäuser, Springer, – 2011. – 94 p.

150. Hinton, D.B. An expansion theorem for an eigenvalue problem with eigenvalue parameter in the boundary condition // – New York: Quarterly Journal of Mathematics, – 1979. v.30, №2, – p. 33–42.

151. Ho, K.P. Strong maximal operator on mixed-norm spaces // – Ferrara: Annali dell'Universita' di Ferrara. Sezione VII. Scienze Matematiche, – 2016. 62, – p. 275–291.

152. Ho, K.P. Mixed norm Lebesgue spaces with variable exponents and applications // – Parma: Rivista di Matematica della Università di Parma, – 2018. 9, – p. 21–44.

153. Horvath, M. Inverse spectral problems and closed exponential systems // – Washington Road: Annals of Mathematics, – 2005. 162, – p. 885–918.

154. Ismailov, M.I. On Hausdorff-Young inequalities in generalized Lebesgue spaces // –Istanbul: Turkish Journal of Mathematics, – 2020. 44, №5, – p. 1757–1768.
155. Ismailov, M.I. b-Hilbert systems // – Baku: Proceedings of NAS of Azerbaijan, – 2010. v.30, №2, – p. 119–122.
156. Ismailov, M.I. K-Bessel and K-Hilbert systems in nonseparable Banach spaces // Proceeding of the International conference devoted to the 80-th anniversary of academician Akif Gadjiev, –6–8 december, – Baku: – 2017, – p. 101–101.
157. Ismailov, M.I. On Bessel and Riesz-Fisher systems with respect to Banach space of vector-valued sequences // – Transilvania: Bulletin of the Transilvania University of Braşov, – 2019. v.12(61), №2, Series III: Mathematics, Informatics, Physics, –p. 303–318.
158. Ismailov, M.I. On b-Bessel systems // – Baku: Proceedings of NAS of Azerbaijan, – 2010. v.38, –p. 89–94.
159. Ismailov, M.I. On close b-bases // – Baku: Transactions of NAS of Azerbaijan, – 2011. v.31, №4, – p. 95–102.
160. Ismailov, M.I. On continuability of $b_{\hat{X}}$-Bessel systems with respect to CB-space $\hat{X}$ // – Baku: Journal of Contemporary Applied Mathematics, v.1, – 2011. № 2, – p. 1–7.
161. Ismailov, M.I. On b-frames in Banach spaces // – Madhya Pradesh: International Journal of Mathematical Archive, –2011. 2(12), – p. 2578–2584.
162. Ismailov, M.I. On perturbation of X_d-Bessel bazis in Banach spaces with respect to X_d // – Baku: Proceedings of the Institute of applied Mathematics, – 2013. v.2, №1, – p. 84–89.
163. Ismailov, M.I. On stability of $\tilde{X}$-Riesz basis // – Baku: International Workshop on Non-Harmonic Analysis and Differential Operators, –25–27 may, – 2016, – p. 54–55.

164. Ismailov, M.I. On the solution for a class of third order pseudohyperbolic equations // – Baku: Journal of Contemporary Applied Mathematics, – 2011. v.1, №1, – p. 43–53.

165. Ismailov, M.I. On the Solvability of Riemann Problems in Grand Hardy Classes // – Moscow: Mathematical Notes, – 2020. v. 108, №2, – p. 55–69.

166. Ismailov, M.I. On uncountable K-Bessel and K-Hilbert systems in nonseparable Banach space // – Baku: Proceedings of NAS of Azerbaijan, – 2019. v.45, №2, – p. 192–204.

167. Ismailov, M.I., Alili, V.Q. On basicity of the system of exponents in grand-Lebesgue spaces // Proceeding of the 60th anniversary of NAS of Azerbaijan, 23-25 oktyabr, – Baku: – 2019. – p. 272–274.

168. Ismailov, M.I., Garayev T.Z. b-frames, b-atomic decompositions, Banach g-frames and their perturbations under Noetherian maps // – Baku: Proceedings of NAS of Azerbaijan, – 2014. 40, 1, – p. 78–87.

169. Ismailov, M.I., Garayev, T.Z. Some Generalizations of Riesz Fisher Theorem // – Bulgaria: International Journal of Mathematical Analysis, – 2011. v.5, №37, – p. 1803–1812.

170. Ismailov, M.I., Jabrailova A. On $\tilde{X}$-frames and conjugate systems in Banach spaces // – Tehran: Communications in mathematical analysis, – 2014. 1(2), – p. 19–26.

171. Ismailov, M.I., Guliyeva, F. and Nasibov, Y. On a generalization of the Hilbert frame generated by the bilinear mapping // – London: Journal of Function Spaces, – 2016, – p. 1-8.

172. Ismailov, M.I., Nasibov Y.I. On One Generalization of Banach frame // – Baku: Azerbaijan Journal of Mathematics, – 2016. 6(2), – p. 143–159.

173. Ismailov, M.I., Nasibov Y.I. On K-Bessel and K-Hilbert systems and relations between them // Operators, functions, and systems of mathematical physics, An International Conference Dedicated to the 70-th anniversary of the birth of Hamlet Isayev/ Isaxanli, – 21– 24 may, Khazar University, – Baku: – 2018, – p. 166.

174. Israfilov, D.M., Tozman, N.P. Approximation by polynomials in Morrey–Smirnov classes // – Bulgaria: East Journal Approximations, – 2008. v. 14, №3, – p. 255–269.
175. Israfilov, D.M., Tozman, N.P. Approximation in Morrey–Smirnov classes // – Baku: Azerbaijan Journal of Mathematics, – 2011. v.1, №1, – p. 99–113.
176. Iwaniec, T. and Sbordone, C. Riesz transforms and elliptic PDEs with VMO coefcients // – Prishtine: Journal of Mathematics Analysis, –1998. 74, – p. 183–212.
177. Iwaniec, T., Sbordone, C. On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses // – Berlin: Archive for Rational Mechanics and Analysis, –1992. 119, – p.129–143.
178. Jamaguti, M. The asymptotic behaviour of the solution of a semilinear partial differential equation related to an active pulse transmission line // – Taito-ku: Proceeding of the Japan Academy, – 1963. 39, №10, – p. 726–730.
179. Khuskivadze, G., Kokilashvili, V., and Paatashvili, V. Boundary value problems for analytic and harmonic functions in domains with nonsmooth boundaries // – Tbilisi: Applications to conformal mappings, Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, – 1998. v.14, – p. 1–195.
180. Kinnunen, J. The Hardy-Littlewood maximal function of a Sobolev function // – Boston: Israel Journal of Mathematics, – 1997. 100, – p. 117–124.
181. Kokilashvili, V. Boundedness criterion for the Cauchy Singular Integral Operators and Maximal Functions in weighted grand Lebesgue spaces // – Tbilisi: Bulletin of the Georgian NAS, – 2009. v.3, №3, – p. 5–7.
182. Kokilashvili, V.M. The Riemann–Hilbert problem in the class of Cauchy type integrals with densities of grand Lebesgue spaces / V.M.Kokilashvili, A.Meskhi, V.Paatashvili // – Tbilisi: Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute 170, – 2016, –p. 208–211.
183. Kokilashvili, V.M., Integral operators in non-standard function spaces, V.M.Kokilashvili, A.Meskhi, H. Rafeiro [et al.]. Birkhäuser, – 2016.

184. Kokilashvili, V.M. Maximal and fractional operators in weighted $L^{p(x)}$ spaces // – Durham: Revista Matematica Iberoamericana, – 2004. 20(2), – p. 495–517.

185. Kovacevic, J., Chebira, A. Life beyond bases: The advent of frames (Part I) // – Ottawa: IEEE Signal Processing Magazine. – 2007. v.24, №4, – p. 86–104.

186. Kováčik, O., Rákosník J. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ // – Boston: Czechoslovak Mathematical Journal, – 1991. 41(116), – p. 592–618.

187. Kuchukaslan, M., Deger, U., Dovgoshey, O. On the statistical convergence of metric valued sequences // – Boston: Ukrainian Mathematical Journal, – 2014. 6(5), – p. 796–805.

188. Kudu, M., Amirali, I. Method of Lines for Third Order Partial Differential Equations // – Florida: Journal of Applied Mathematics and Physics, – 2014. 2(2), – p. 33–36

189. Lerner, A. K. Some remarks on the Hardy-Littlewood maximal function on variable L_p spaces // – Berlin: Mathematische Zeitschrift, – 2005. 251(3), – p. 509–521.

190. Lyubarskii, Y.I., Kristian, S. Complete Interpolating sequences for Paley-Wiener Spaces and Muckenhoupts A(p) condition // – Durham: Revista Matematica Iberoamericana, –1997. 13, 2, –p. 361–376.

191. Malat, S. A wavelet tour of signal processing / S.Malat. – San Diego: Academic Press, –1999.

192. Mashiyev, R.A. Some Applications to Lebesgue Points in Variable Exponent Lebesgue Spaces // – Ankara: Cankaya University Journal of Science and Engineering, – 2010. 7 (2), – p. 105–113.

193. Meyer, Y. Wavelets and operators / Y.Meyer. – Paris: Herman, – 1990.

194. Morrey, C.B. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations // – Washington: Transactions of American Mathematical Society, – 1938. v. 43, № 4, – p. 207–226.

195. Musielak, J. and Orlicz, W. On modular spaces // – Boston: Studia Mathematica, –1959. 18, – p. 49–65.

196. Nagumo, J. Arimoto, S. and Yoshizawa, S. An active pulse transmission line simulating nerve axon // – Tokyo: Proceeding of the JRE, – 1962. 50(10), – p. 2061–2070.

197. Najati, A., Faroughi, M.H. and Rahimi, A. G-frames and stability g-frames in Hilbert space // – Kyiv: Methods of Functional Analysis and Topology, – 2008. 14, – p. 271–286.

198. Nekvinda, A. Hardy–Littlewood maximal operator on $L^{p(x)}(R^n)$ // – Zagreb: Mathematical Inequalities and Applications, – 2004. 7(2), – p. 255–265.

199. Orlicz, W. Über konjugierte exponenten folgen // – Boston: Studia Mathematica, – 1931. 3, – p. 200–211.

200. Paley, R.E. Some theorems on orthogonal functions // – Boston: Studia Mathematica, – 1931. v.3, – p. 226–238.

201. Petre, J. Sur l'utilisation des suites inconditionnellement sommables dans la theorie des espaces d'interpolation // – Padua: Rendiconti del Seminario Matematico della Universita of Padova, – 1971. v. 46, – p. 173–190.

202. Rafeiro, H., Vargas, A. On the compactness in grand spaces // – Tbilisi: Georgian Mathematical Journal, – 2015. 22(1), – p. 141–152.

203. Rahimi, A., Daraby, B., Darvishi, Z. Construction of Continuous Frames in Hilbert spaces // – Baku: Azerbaijan Journal of Mathematics, – 2017. 7(1), – p. 49–58.

204. Rahimi, A., Najati, A., and Dehghan, Y.N. Continuous Frames in Hilbert Spaces // – Kyiv: Methods of Functional Analysis and Topology, – 2006. 12 (2), – p. 170–182.

205. Reiko, A. and Yojiro, H. On global solutions for mixed problem of a semilinear differential equation // – Taito-ku: Proceeding of the Japan Academy, – 1963. 39, № 10, – p. 721–725.

206. Samko, N. Weight Hardy and singular operators in Morrey spaces // – Boston: Journal of Mathematical Analysis and Applications, – 2009. 35, №1, – p. 183–188.

207. Samko, S. Hardy inequality in the generalized Lebesgue spaces // – Bulgaria: Fractional Calculus and Applied Analysis, – 2003. 6:4, – p. 355–362.

208. Schneider, A. A note on eigenvalue problems, with eigenvalue parameter in the boundary conditions // – Berlin: Mathematische Zeitschrift, – 1974. v.136, – p. 163–167.

209. Schur, I. Uber endliche Gruppen und Hermitische Formen // – Berlin: Mathematische Zeitschrift, –1918. v.1, – p. 183–207.

210. Sharapudinov, I.I. On direct and inverse theorems of approximation theory in variable Lebesgue and Sobolev spaces // – Baku: Azerbaijan Journal of Mathematics, – 2014. v.4, №1, – p. 55–72.

211. Sharapudinov, I.I., The topology of the space $L^{p(t)}([0,1])$ // – Moscow: Matematicheskie Zametki, – 1979. 26, №4, – p. 613–632.

212. Singer, I. Bases in Banach spases I: [in 2 vol.] / I. Singer. – New York: SVBH, – 1970. v.1 – 672 p.

213. Stein E.M. Interpolation of linear operators // – Washington: Transactions of American Mathematical Society, –1956. №83, – p. 482–492.

214. Steinhaus, H. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique // – Warszawa: Colloquium Mathematicum, –1951. 2, – p. 73–74.

215. Sun, W. G-frames and G-Riesz bases // – Boston: Journal of Mathematical Analysis and Applications, – 2006. 322, –p. 473–452.

216. Titchmarsh, E.C. A contribution to the theory of Fourier transforms // – London: Proceeding of the London Mathematical Society, – 1924. №2, – p. 279–289.

217. Walter, J. Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in theboundary conditions // – Berlin: Mathematische Zeitschrift, – 1973, v.133, – p. 301–312.

218. Wilder, C.E. Expansions problems of ordinary differential equations with auxiliary conditions at more than two points// – Washington: Transactions of American Mathematical Society, – 1917. v.18. – p. 415–442.

219. Xianling, F., Dun, Z. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$ // – Boston: Journal of Mathematical Analysis and Applications, – 2001. v. 263, №1, – p. 424–446.

220. Young, R. An introduction to nonharmonic Fourier series / R.Young. – New York: – 1980. – 246 p.

221. Zeren, Y., Ismailov, M.I., Karacam, C. On basicity of the system of exponents and trigonometric systems in the weighted grand-Lebesgue spaces // 3nd International Conference on Mathematical Advances and Applications, –24–27 june, – Istanbul: – 2020, – p. 204.

222. Zeren, Y., Ismailov, M.I., Karacam, C. Korovkin-type theorems and their statistical versions in grand Lebesgue spaces // –Istanbul: Turkish Journal of Mathematics, –2020. v.44, – p. 1027 – 1041.

223. Zeren, Y., Ismailov, M., Sirin, F. On basicity of eigenfunctions of one discontinuous spectral problem in weighted grand-Lebesgue spaces // 3nd International Conference on Mathematical Advances and Applications, –24–27 june, –Istanbul: – 2020, – p. 205.

224. Zeren, Y., Ismailov, M.I., Sirin, F. On basicity of the system of eigenfunctions of one discontinuous spectral problem for second order differential equation for grand-Lebesgue space // –Istanbul: Turkish Journal of Mathematics, – 2020. v.44, №5, – p. 1995–1612.

225. Zhu, Y.C., Wang, S.Y. The stability of Banach Frames in Banach spaces // – Boston: Acta Mathematica Sinica, English Series, – 2010. v.26, №12, – p. 1165–1170.

226. Zorko, C.T., Morrey spaces // – Ann Arbor: Proceedings of American Mathematical Society, – 1986. v. 98, №4, – p. 586–592.